

இயற்கணிதம்

(ALGEBRA)

ரா. சுந்தரவல்லி



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. தி. (க.வெ.) வரிசை எண்—331

இ ய ற் க ணி த ம்

(பட்டம்படிப்பிந்திரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியை

திருமதி ஈ. கத்தரவல்லி,
கணிதப் பேராசிரியை,
சென்னை மருத்துவக் கல்லூரி,
சென்னை.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

பொருளடக்கம்

முதல் பாகம்

	பக்கம்
1. பகுதிப் பின்னங்கள் (Partial Fractions) ...	1
2. இருபடித் தேற்றம்—அளவுக்கிணங்கிய படிக்கு (Binomial Theorem for ... Rational Index)	28
3. படிக்குறித் தேற்றம் (Exponential Theorem)...	36
4. மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series) ...	92
5. தொடர்களின் கூட்டம் (Summations of ... Series)	122

இரண்டாம் பாகம்

1. அணிக்கோவை (Determinants) ...	165
2. சமன்பாட்டுக் கொள்கை (Theory of ... Equations)	217

மூன்றாம் பாகம்

1. மெய்யெண் தொகுதி (System of Real ... Numbers)	329
2. அத்தழித் தொடர் முறைகள்—எல்லைகள் ... (Infinite Sequences—Limits)	374
3. (a) அத்தழித் தொடர்கள்—குவிதம், விரிதம் (Infinite Series—Convergency, Divergency)	398
(b) இருபடித் தேற்றம், படிக்குறித் தேற்றம், மடக்கைத் தேற்றம் — இவற்றின் தெரிப்புகள் (Proof for the Binomial, Exponential and Logarithmic Theorems)	484
4. எண் கொள்கை (Theory of Numbers) ...	529
கணிச்சொற்கள்	552

முதல் பாகம்

1. பகுதிப் பின்னங்கள்

(Partial Fractions)

1.1. கனபலகை

பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு (Polynomial function):

n பூச்சியம் அல்லது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாகவுத், a_0, a_1, a_2, \dots முத்தியவை மாறிலிகளாகவும் கொண்ட ஒரு சார்பை

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

என எழுதலாம். இச் சார்பு, x -ன் n படிபுடைய விகித முழுச் சார்பு அல்லது x -ன் பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைச் சார்பு எனப்படும்.

1.2. அளவுக் கிணங்கிய பின்னம் (Rational Fraction or Function)

P, Q என்பவை பல்லுறுப்புச் சார்புகளானால், $\frac{P}{Q}$ என்ற ஒரு சார்பை அளவுக் கிணங்கிய சார்பு (அல்லது பின்னம்) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

1.3. அளவுக் கிணங்கிய தகு பின்னம் (Proper Fraction)

$\frac{P}{Q}$ என்ற சார்பில், P -ன் படி Q -ன் படியை விடச் சிறிதாக இருப்பின், அச் சார்பு அளவுக் கிணங்கிய ஒரு தகு பின்னம் எனப்படும்.

அளவுக் கிணங்கிய தகாப் பின்னம் (Improper Fraction):

$\frac{P}{Q}$ என்ற சார்பில், P -ன் படி Q -ன் படியை விடப் பெரிதாகவோ, அல்லது அதற்குச் சமமாகவோ இருக்குமானால், அச் சார்பு அளவுக் கிணங்கிய ஒரு தகாப் பின்னம் எனப்படும்.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பின்னங்களை, ஒரு பின்னத்தோடு கூட்டவோ அல்லது ஒரு பின்னத்திலிருந்து குறைக்கவோ தங்குத் தெரியும். அப்படிச் செய்வதன்மூலம் தங்கு ஒரே ஒரு பின்னம் கிடைக்கும். அப் பின்னம் ஒரு தரு பின்னமாகவோ அல்லது ஒரு தகாப் பின்னமாகவோ இருக்கலாம்.

ஆனால் இவ்வத்தியாயத்தில் ஒரு தரு பின்னத்தையோ அல்லது ஒரு தகாப் பின்னத்தையோ இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பின்னங்களாகப் பிரிக்கும் முறையைக் கவனிப்போம். இம் முறையைத்தான் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தல் (Resolution or splitting into partial fractions) என்கிறோம்.

வினாக்கள் :

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \text{ ஐச் சுருக்கி } \frac{2x+3}{x^2+3x+2} \text{ என எழுதலாம்.}$$

இதற்குப் பதிலாக $\frac{2x+3}{x^2+3x+2}$ தங்குக் கொடுக்கப்படுமேயானால்

இச்சரியை நாம் $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ எனப் பிரித்து எழுதலாம்.

இவ்விதமாகப் பிரித்து எழுதும் முறை பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதுதல் எனப்படும்.

1.4. தேற்றம்

$$L + \frac{M}{N} = L_1 + \frac{M_1}{N_1} \text{ ஆனால், } L-\text{உம், } L_1-\text{உம் பல்லுறுப்புச்}$$

செய்க்கைக் கோவைச் சார்புகள். $\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1}$ தரு பின்னக்கம்

என்றால் $L = L_1$, $\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1}$ என நிறுபிக்கலாம்.

தெரியு:

$$L + \frac{M}{N} = L_1 + \frac{M_1}{N_1} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$L - L_1 = \frac{M_1}{N_1} - \frac{M}{N}$$

$$= \frac{M_1 N - M N_1}{N N_1}$$

$L=L_1$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைக் கோவைச் சார்பாகும். மேலும், $\frac{M_1}{N_1} = \frac{M}{N}$ என்பது ஒரு தகு பின்னமாகும். ஏனெனில், NN_1 -ன் படி, M_1N -ன் படியையும், MN_1 -ன் படியையும் விட உயர்த்தது. எனவே இடக் கைப்புறம் உள்ள $(L-L_1)$ என்ற ஒரு பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைச் சார்பு, வலக் கைப்புறம் உள்ள $\frac{M_1}{N_1} = \frac{M}{N}$ என்ற ஒரு தகு பின்னத்திற்குச் சமமாகிறது. ஆகவே, $L = L_1$ எனவும், $\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1}$ எனவும் நிறுவப்படுகிறது.

1.5. இப்பகுதியில், பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதும் சேர்ப்புறத்தை ஆராய்வோம்.

(i) $\frac{f(x)}{F(x)}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும் என்று வைத்துக் கொள்வோம். $f(x)$ -உம் $F(x)$ -உம் பல்லுறுப்புக் கோவைகள், $f(x)$ -இன் படி, $F(x)$ -ன் படியை விடக் குறைவாக இருக்குமானால், $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஒரு தகு பின்னமாகும். எனவே, நாம் இந்தத் பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும்.

(ii) $\frac{f(x)}{F(x)}$ -ல், $f(x)$ -ன் படியானது $F(x)$ -ன் படியை விடப் பெரியதாக இருக்குமானால், $\frac{f(x)}{F(x)}$ ஒரு தகாப் பின்னமாகும். எனவே, $f(x)$ -ஐ, $F(x)$ -ஆல் வகுக்க வேண்டும். $Q(x)$ என்ற எவும், $R(x)$ என்ற மீதியும் வரும். அதாவது,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{F(x)}$$

$Q(x)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. $\frac{R(x)}{F(x)}$ ஒரு தகு பின்னமாகும். இன்பு $\frac{R(x)}{F(x)}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

(iii) $\frac{f(x)}{F(x)}$ -ல், $f(x)$ -ன் படியும் $F(x)$ -ன் படியும் சமமாக இருப்பின் $f(x)$ -ஐ, $F(x)$ -ஆல் வகுக்கும்போது எது ஒரு மீதியாக வரும்.

அதாவது,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = A + \frac{R(x)}{F(x)} \text{ என்ற ஒற்றெருமைகிடைக்கும் } \frac{R(x)}{F(x)}$$

என்ற தகு பின்னத்தை நாம் பகுதியில் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

வினக்கம் :

$$(i) \frac{6x^3 + 5x - 8}{2x^3 - 5x^2 - x} \text{ என்பது ஒரு தகு பின்னமாகும். இதை}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{2x+1} \text{ எனப் பகுதியில் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதலாம்.}$$

$$(ii) \frac{2x^3 - 8x^2 - 6x - 28}{2x^3 - 5x - 12} \text{ என்பதை எடுத்துக் கொண்}$$

டாக $f(x) = 2x^3 - 8x^2 - 6x - 28$ -ன் படியானது $F(x) = 2x^3 - 5x - 12$ -ன் படியை விடப் பெரியது. எனவே நாம் முதலில் $2x^3 - 8x^2 - 6x - 28$ -ஐ $2x^3 - 5x - 12$ -ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$$\frac{2x^3 - 8x^2 - 6x - 28}{2x^3 - 5x - 12} = (x + 1) + \frac{9x - 14}{2x^3 - 5x - 12}$$

$Q(x) = (x + 1)$ என்பது ஒரு பல்லுறுப்புச் சாரியாகும்.

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{9x - 14}{2x^3 - 5x - 12} \text{ ஒரு தகு பின்னமாகும்.}$$

இதையே நாம் பகுதியில் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

$$(iii) \frac{x^3 + 6x + 8}{x^3 + 6x + 8} \text{ என்பதில் } f(x) = x^3 + 6x + 8, F(x)$$

$= x^3 + 6x + 8$. $f(x)$ -ன் படியும் $F(x)$ -ன் படியும் சமமாக இருப்பதால் $(x^3 + 6x + 8)$ -ஐ $(x^3 + 6x + 8)$ -ஆல் வகுக்க வேண்டும்.

$$\text{எனவே } \frac{x^3 + 6x + 8}{x^3 + 6x + 8} = 1 + \frac{x}{x^3 + 6x + 8} \text{ ஆகும். இங்கு}$$

$$Q(x) = 1 \text{ (ஒரு மாநிலி), } \frac{R(x)}{F(x)} = \frac{x}{x^3 + 6x + 8} \text{ இப்பகுதியில் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும்.}$$

எனவே, அளவுக் கிணக்கிய ஒரு பின்னம் அல்லது சாரியைப் பகுதியில் பின்னங்களாகப் பிரிக்கும் முன்பு, அதன் மேல் கோவை விடப் படி, கீழ்க் கோவையின் படியை விடச் சிறியதாக இருக்கிறதா

பகுதிப் பின்னங்கள்

என்று கவனிக்கவேண்டும். ஆப்படி இல்லாவிடில், மேல் கோவைவைக் கீழ்க் கோவைவாய்க் வகுத்து மீதிவாக வரும் கோவைவின் படி கீழ்க் கோவைவின் படிவை விடக் குறைவாகவரும் வரை வகுத்து, இப்படிக்கீடைக்கும் தகு பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

1.6. 1. $F(x)$, x -ன் நுதற்படிக்காரணிகளைக் (Linear factors)கொண்டதாக இருப்பின், $\frac{f(x)}{F(x)}$ என்ற பின்னத்தைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கும்போது $F(x)$ -ன் ஒவ்வொரு காரணிக்கும் ஒவ்வொரு பின்னம் வரும்.

$$F(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \dots (a_r x + b_r)$$

என்று எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \frac{A_3}{(a_3x + b_3)} + \dots + \frac{A_r}{(a_r x + b_r)}$$

எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதலாம். இந்த முற்றொருமைப் $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$ என்பன மாநிலிகள். இவைகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

இரண்டு பக்கங்களையும் $(a_1x + b_1)$ -ஆல் பெருக்கவேண்டும்.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} \times (a_1x + b_1) &= \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} \times (a_1x + b_1) \\ &+ \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} \times (a_1x + b_1) + \frac{A_3}{(a_3x + b_3)} \times (a_1x + b_1) \\ &+ \dots + \frac{A_r}{(a_r x + b_r)} \times (a_1x + b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{f(x)}{F(x)} \times (a_1x + b_1) &= A_1 + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} \times (a_1x + b_1) \\ &+ \frac{A_3}{(a_3x + b_3)} \times (a_1x + b_1) + \dots + \frac{A_r}{(a_r x + b_r)} \times (a_1x + b_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \dots (a_r x + b_r)} \times (a_1x + b_1) \\ = A_1 + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} \times (a_1x + b_1) + \frac{A_3}{(a_3x + b_3)} \times (a_1x + b_1) \\ + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$x = -\frac{b_1}{a_1} \text{ என்று எடு செய்க.}$$

$$\begin{aligned} & f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right) \\ & \left[a_2 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2 \right] \left[a_3 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_3 \right] \dots \left[a_r \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_r \right] \\ & = A_1 + \frac{A_2}{a_2 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_2} \times \left(a_1 \cdot -\frac{b_1}{a_1} + b_1 \right) \\ & \quad + \frac{A_3}{a_3 \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_3} \left(a_1 \cdot -\frac{b_1}{a_1} + b_1 \right) + \dots \\ & \quad + \dots \frac{A_r}{a_r \cdot \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) + b_r} \left(a_1 \cdot -\frac{b_1}{a_1} + b_1 \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}{\left(a_2 \cdot -\frac{b_1}{a_1} + b_2\right) \left(a_3 \cdot -\frac{b_1}{a_1} + b_3\right) \dots \left(a_r \cdot -\frac{b_1}{a_1} + b_r\right)} \\ & = A_1 + \frac{A_2(0)}{\left(-\frac{a_2 b_1}{a_1} + b_2\right)} + \frac{A_3(0)}{\left(-\frac{a_3 b_1}{a_1} + b_3\right)} \dots \\ & \quad + \frac{A_r(0)}{\left(-\frac{a_r b_1}{a_1} + b_r\right)}. \end{aligned}$$

$$\therefore A_1 = \frac{f\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}{\left(-\frac{a_2 b_1}{a_1} + b_2\right) \left(-\frac{a_3 b_1}{a_1} + b_3\right) \dots \left(-\frac{a_r b_1}{a_1} + b_r\right)}.$$

இவ்விதமாகவே நாம் ஒவ்வொன்றாகப் பகுதியில் பின்னங்களில் மாற்றிகளை A_2, A_3, \dots, A_r கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$\frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ -ஐப் பகுதியில் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

முதல் வழி :

$$f(x) = x^3 + x + 1; F(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

மேல்கோவையின் படி கீழ்க்கோவையின் படியை விடக் குறைவாக இருப்பதால் வகுக்கவேண்டிய தேவையில்லை. ஏனெனில்

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \text{ என்பது ஒரு தகு பின்னம் ஆகும்.}$$

$F(x)$ -க்கு மூன்று காரணிகள் இருப்பதால் கொடுக்கப்பட்ட தகு பின்னத்தை மூன்று பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)$ -ஆல் பெருக்கி $x=1$ எனக் கொடுத்தால்,

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B}{(x-2)}(x-1) + \frac{C}{(x-3)}(x-1)$$

$$\frac{(1)^3 + 1 + 1}{(1-2)(1-3)} = A$$

$$\therefore A = \frac{3}{2}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-2)$ -ஆல் பெருக்கி $x=2$ எனக் கொடுத்தால்,

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)}(x-2) + B + \frac{C}{(x-3)}(x-2)$$

$$\frac{(2)^3 + 2 + 1}{(2-1)(2-3)} = B$$

$$\therefore B = -7.$$

இதே போல் இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-3)$ -ஆல் பெருக்கி $x=3$ எனக் கொடுக்கவேமானால் தமக்கு C -ன் மதிப்புக் கிடைக்கும்.

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)}(x-3) + \frac{B}{(x-2)}(x-3) + C.$$

$$\frac{(3)^3 + 3 + 1}{(3-1)(3-2)} = C \quad \therefore C = \frac{19}{2}$$

எனவே,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{8}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)}$$

இரண்டாவது வழி :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2+x+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= A(x^2-5x+6) + B(x^2-4x+3) + C(x^2-3x+2) \\ &= x^2(A+B+C) + x(-5A-4B-3C) \\ &\quad + (6A+3B+2C). \end{aligned}$$

இரு புறங்களிலும் சமபடிக்க கொடுக்கலாகச் சமன் செய்தால்,

$$A+B+C = 1 \quad \dots \quad (1)$$

$$-5A-4B-3C = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$$6A+3B+2C = 1 \quad \dots \quad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளில் தீர்வு

$$A = \frac{8}{2}, \quad B = -7, \quad C = \frac{13}{2}.$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தரு பின்னத்தில் பகுதிப் பின்னங்கள்

$$\frac{8}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)}$$

மூன்றாவது வழி :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$(x-1)(x-2)(x-3)$ -ஆல் இரண்டு புறங்களையும் பெருக்கு வேண்டினால்,

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-2) \\ &\quad + C(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 (A+B+C) + x(-5A-4B-3C) + (6A+3B+2C).$$

x -க்கு ஏதாவது மதிப்பைக் கொடுத்து x -ஐ செயல்பொறாமலும் தவற்று மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$x = -2$ என்று x -ஐ செய்தால்,

$$(-2)^2 + (-2) + 1 = (-2)^2 (A+B+C) + (-2)(-5A-4B-3C) + (6A+3B+2C).$$

$$4-2+1 = 20A+15B+12C$$

$$3 = 20A+15B+12C \quad \dots \quad (1)$$

$x = -1$ என்று x -ஐ செய்தால்,

$$(-1)^2 + (-1) + 1 = (-1)^2 (A+B+C) + (-1)(-5A-4B-3C) + (6A+3B+2C)$$

$$1-1+1 = 12A+8B+6C$$

$$1 = 12A+8B+6C \quad \dots \quad (2)$$

$x = 0$ என்று x -ஐ செய்தால்,

$$1 = 6A+3B+2C \quad \dots \quad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து A, B, C ஆகியவைகளின் தீர்வுகளை $A = \frac{8}{9}, B = -7, C = \frac{18}{9}$ என வரும்.

எனவே,

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{18}{9} \cdot \frac{1}{(x-3)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.

$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$ இல் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.

மேல் கோவைகளின் படி கீழ்க் கோவைகளின் படியை விடக் குறைவாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்னம் ஒரு தகு பின்னமேயாகும்.

எனவே,

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \frac{A}{(1-ax)} + \frac{B}{(1-bx)} + \frac{C}{(1-cx)}$$

தாம் மூலம் வழியையே கையாண்டால், $(1-ax)$ -ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி $x = \frac{1}{a}$ என கரு செய்தால்,

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} = A.$$

அடுத்தபேரம் $(1-bx)$ -ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி $x = \frac{1}{b}$ என்று கரு செய்தால்,

$$\frac{b^2}{(b-a)(b-c)} = B.$$

$(1-cx)$ -ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி $x = \frac{1}{c}$ என கரு செய்தால்,

$$\frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = C.$$

என A, B, C -ன் மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(1-ax)} \\ &+ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{(1-bx)} \\ &+ \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{(1-cx)} \end{aligned}$$

1-7. II. $F(x) = (ax+b)^p (a_{1+1}x + b_{1+1}) \dots (a_nx + b_n)$
என இருந்தால்,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_p}{(ax+b)^p} \\ &+ \frac{A_{p+1}}{(a_{1+1}x + b_{1+1})} + \dots + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)} \end{aligned}$$

என எடுத்துக் கொண்டு மேற் கூறிய ஏதாவதொரு ஒரு வழியில் $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ஆகிய அம்சாற்றிகளின் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-3)}$ -ஐப் பகுதியின் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

முதல் வழி :

$$\frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-3)}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)^2$ -ஆல் பெருக்கி, $x = 1$ என \times செய்யுதல்,

$$B = \frac{2(1)^2 + 5}{(1-3)} = -\frac{7}{2}.$$

$(x-3)$ -ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கி, $x = 3$ என \times செய்யுதல்,

$$C = \frac{2(3)^2 + 5}{(3-1)^2} = \frac{23}{4}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x-1)^2(x-3)$ -ஆல் பெருக்கினால்,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5 &= A(x-1)(x-3) + B(x-3) + C(x-1)^2 \\ &= x^2(A+C) + x(-4A+B-2C) \\ &\quad + (3A-3B+C). \end{aligned}$$

$x = 0$ என்று \times செய்யுதல்,

$$3A - 3B + C = 5.$$

இதில் $B = -\frac{7}{2}$, $C = \frac{23}{4}$ என \times செய்தால்,

$$A = -\frac{15}{4} \text{ என வரும்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-3)} &= -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{23}{4} \cdot \frac{1}{(x-3)}. \end{aligned}$$

இரண்டாவது வழி :

$\frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-8)}$ - இல் பகுதியில் முன்னிலைகளாகப் பிரிக்கவும்.

$$\frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-8)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-8)}$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் $(x-1)^2(x-8)$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$2x^2 + 5 = A(x-1)(x-8) + B(x-8) + C(x-1)^2$$

$$2x^2 + 5 = x^2(A+C) + x(-4A+B-2C) + (8A-8B+C)$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் சம டிகளின் கெழுக்கைச் சமன் செய்தால்

$$A + C = 2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$-4A + B - 2C = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$8A - 8B + C = 5 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு

$$A = -\frac{15}{4}, \quad B = -\frac{7}{2}, \quad C = \frac{23}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-8)} &= -\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{23}{4} \cdot \frac{1}{(x-8)} \end{aligned}$$

மேறு வழி :

$$x-1 = y \text{ என } (1) \text{ செய்ய.}$$

$$\therefore x = y + 1.$$

$$\therefore \frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-8)} = \frac{2(y+1)^2 + 5}{y^2(y+1-8)} = \frac{7+4y+2y^2}{y^2(y-8)}$$

பகுதிப் பின்னங்கள்

$$-(2+y) \cdot 7 + 4y + 2y^2 \left(-\frac{7}{2} - \frac{15}{4}y \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{7 - \frac{7y}{2}}{\frac{16y}{2} + 2y^2} \\ & \frac{16y}{2} = \frac{16}{4}y^2 \\ & \frac{28}{4}y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{7 + 4y + 2y^2}{y^2(y-2)} \\ &= \frac{1}{y^2} \left[\left(-\frac{7}{2} - \frac{15}{4}y \right) + \frac{16y^2}{(y-2)} \right] \\ &= -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{y} + \frac{28}{4} \cdot \frac{1}{(y-2)} \\ \therefore \frac{2x^2 + 5}{(x-1)^2(x-2)} &= -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)} \\ &\quad + \frac{28}{4} \cdot \frac{1}{(x-2)} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4. $\frac{x^4-5x^3+10x^2-5x-1}{(x-1)^2(x-2)}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

மேல் கொள்கவும், கீழ்க்கொள்கவும் சம படியாக இருப்பதால் வகுக்க வேண்டும். வகுத்து வரும் சவு ஒரு மாநிலியாக இருக்கும்.

$$\therefore \frac{x^4-5x^3+10x^2-5x-1}{(x-1)^2(x-2)} = 1 + \frac{x^3-x-8}{(x-1)^2(x-2)}$$

$\frac{x^3-x-8}{(x-1)^2(x-2)}$ -ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவேண்டும்.

$$\begin{aligned} \frac{x^3-x-8}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &\quad + \frac{D}{(x-1)^3} \dots \dots \quad (1) \end{aligned}$$

$(x-1)^2 (x-2)$ -ஆல் இரண்டு பக்கங்களையும் பெருக்கினால்,

$$x^2 - x - 2 = A(x-1)^2 + B(x-1)^2(x-2) \\ + C(x-1)(x-1) + D(x-2).$$

$$x^2 - x - 2 = x^3(A+B) + x^2(-2A-4B+C) \\ + x(2A+5B-2C+D) + (-A-2B+2C-2D).$$

முதல் வழியில் மூலம் தாம் A , D -ன் மதிப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம். இரண்டாவது அல்லது மூன்றாவது வழியில் மூலம் B , C -ன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(1)-ஐ இரு புறங்களையும் $(x-2)$ -ஆல் பெருக்கி $x = 2$ எனக் கொள்வதால்

$$A = \frac{4-2-2}{1} = -1$$

அதேபோல் $(x-1)^2$ -ஆல் இரு புறங்களையும் பெருக்கி $x = 1$ எனக் கொள்வது,

$$D = \frac{1-1-2}{-1} = 2$$

இரு புறங்களிலும் சமன்பாடுகளுக்கானச் சமன் செய்தால்

$$A + B = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$-2A - 4B + C = 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளில் $A = -1$, $D = 2$ எனக் கொள்வதால் $B = 1$, $C = 2$ என வரும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தகு பின்னம்

$$\frac{x^2 - 5x^2 + 10x^2 - 8x - 1}{(x-1)^2(x-2)} + \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-1)} \\ + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

குறிப்பு :

$$\frac{x^2 - 5x^2 + 10x^2 - 8x - 1}{(x-1)^2(x-2)} = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-1} \\ + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)^2} \text{ எனவும் கொண்டு } a, b, c, d, e\text{-ன்} \\ \text{மதிப்புகளைக் கண்டலாம்.}$$

1-8. III. $F(x) = (ax^2 + bx + c)(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots$ என இருக்குமானால், $ax^2 + bx + c$ -ன் $b^2 - 4ac > 0$ என்றால் அவற்றின் மொத்த காரணிகளைக் காணலாம். $b^2 - 4ac < 0$ என்ற இருக்குமானால் $ax^2 + bx + c$ -ன் மூலங்கள் அனைத்துமே சமபடி இருக்கும். எனவே, $ax^2 + bx + c$ -ன் மொத்த காரணிகளைக் காண இயலாது. அச் சமபத்தியம்,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x+b_2)} + \dots$$

என எடுத்துக் கொண்டு A, B, A_1, A_2, \dots ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\frac{2x^2-11x+5}{(x-8)(x^2+2x-5)} \text{ -ஐ மருதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.}$$

$$\frac{2x^2-11x+5}{(x-8)(x^2+2x-5)} = \frac{A}{(x-8)} + \frac{Bx+C}{x^2+2x-5}$$

இரு பூங்களைவும் $(x-8)(x^2+2x-5)$ ஆல் பெருக்கிச் சமபடி கொடுக்கிச் சமம் செய்தால்,

$$\begin{aligned} x^2 - 11x + 5 &= A(x^2 + 2x - 5) + (Bx + C)(x - 8) \\ &= x^2(A + B) + x(2A - 8B + C) + (-5A - 8C). \end{aligned}$$

$$\therefore A + B = 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$2A - 8B + C = -11 \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$-5A - 8C = 5 \quad \dots \dots \dots (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளின் தீர்வு,

$$A = -1, B = 2, C = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட பின்னம்,

$$\frac{2x^2-11x+5}{(x-8)(x^2+2x-5)} = \frac{-1}{(x-8)} + \frac{2x}{(x^2+2x-5)}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\frac{1}{x^4+1} \text{ -ஐ மருதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க.}$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax+B}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} + \frac{Cx+D}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)}$$

$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ -ஆல் இரெபுக்கினைப் பெருக்கிச் சமன்பாடுகளைச் சமம் செய்தால்,

$$1 = x^2(A+C) + x^2(B-\sqrt{2}A+D+\sqrt{2}C) + x(A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D) + (B+D)$$

$$\therefore A+C = 0 \quad \dots (1)$$

$$B+D+\sqrt{2}(C-A) = 0 \quad \dots (2)$$

$$A+C+\sqrt{2}(D-B) = 0 \quad \dots (3)$$

$$B+D = 1 \quad \dots (4)$$

இச்சமன்பாடுகளில் A ஐ :

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad D = \frac{1}{2}; \quad C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\frac{2x^5+7x^3+5x^2+5x+3}{(x^2+3x+1)(x^2+2x^2+2)}$ -ஐப் பகுத்துக் கொடுக்கவிரும்புக.

$$\frac{2x^5+7x^3+5x^2+5x+3}{(x^2+3x+1)(x^2+2x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+3x+1} + \frac{Cx^2+Dx+E}{x^2+2x^2+2}$$

இதன் ② பகுக்கினைப் $(x^2+3x+1)(x^2+2x^2+2)$ ஆல் பெருக்கினால்

$$\begin{aligned} 2x^5 + 7x^3 + 5x^2 + 5x + 3 &= (Ax+B)(x^2+3x+1) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+3x+1) \\ &= x^4(A+C) + x^3(3A+B+3C+D) \\ &\quad + x^2(3B+C+3D+E) + (2A+D+3E)x \\ &\quad + (2B+E) \end{aligned}$$

எம் படிக்கொடுக்கவந்த சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்டால்

$$A + C = 8 \quad \dots \quad (1)$$

$$8A + B + 8C + D = 7 \quad \dots \quad (2)$$

$$8B + C + 8D + E = 6 \quad \dots \quad (3)$$

$$8A + D + 8E = 6 \quad \dots \quad (4)$$

$$2B + E = 8 \quad \dots \quad (5)$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு,

$$A=B=C=E=1; \quad D=0 \text{ ஆகும்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட பின்னம்,

$$\frac{8x^4+7x^3+6x^2+5x+8}{(x^3+8x+1)(x^3+8x^2+2)} = \frac{x+1}{x^3+8x+1} + \frac{x^2+1}{x^3+8x^2+2}$$

1-4. IV. $F(x) = (ax^2+bx+c)^2 (a_1x+b_1)(a_2x+b_2) \dots$ என இருக்குமானால்,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{Ex+D}{(ax^2+bx+c)^2} \\ &+ \frac{A_1}{(a_1x+b_1)} + \dots \dots \dots \text{என்று} \end{aligned}$$

பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு $A, B, E, D, A_1 \dots$ என்ற மாநிலிகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 8i:

$$\frac{x^2+1}{(x^3+x+1)^2} \text{ இப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.}$$

$$\frac{x^2+1}{(x^3+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^3+x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^3+x+1)^2}$$

$\therefore (x^3+x+1)^2$ ஆல் இரு புறங்களையும் பெருக்கினால்,

$$x^2+1 = (Ax+B)(x^3+x+1) + (Cx+D)$$

$$\therefore x^2+1 = Ax^3+x^2(A+B) + x(A+B+C) + (B+D)$$

இ. எ. - 2

சமன்பாடு கொடுக்களை இரண்டு பக்கங்களிலும் சமன்செய்வதால்

$$A = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$A + B = 1 \quad \dots \quad (2)$$

$$A + B + C = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$B + D = 1 \quad \dots \quad (4)$$

இந்த நான்கு சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண

$$A=0, \quad B=1, \quad C=-1, \quad D=0 \text{ ஆகும்.}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட பின்னத்தின் பகுதியின் பின்னங்கள்

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{x}{(x^2+x+1)^2} \text{ ஆகும்}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\frac{x^2-8x+2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2}$ இல் பகுதியின் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-8x+2}{(x^2+x+1)^2(x+1)^2} &= \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} \\ &\quad + \frac{E}{(x+1)} + \frac{F}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (x^2-8x+2) &= (Ax+B)(x^2+x+1)(x+1)^2 + (Cx+D)(x+1)^2 \\ &\quad + E(x^2+x+1)^2(x+1) + F(x^2+x+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2-8x+2 &= x^4(A+E) + x^4(8A+B+8E+F) \\ &\quad + x^3(8A+8B+C+5E+2F) \\ &\quad + x^2(8A+4B+2C+D+5E+3F) \\ &\quad + x(A+8B+2D+C+8E+2F) \\ &\quad + (B+D+E+F) \end{aligned}$$

இரு பக்கங்களிலும் சமன்பாடு கொடுக்களைச் சமன்செய்வதால்

$$A + E = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$8A+B+8E+F = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$8A+8B+C+5E+2F = 0 \quad \dots \quad (3)$$

$$3A + 4B + 3C + D + 5E + 3F = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$A + 3B + 3D + C + 3E + 2F = -3 \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$B + D + E + F = 2 \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகாண,

$A = 1, B = -2, C = 3, D = -1, E = -1, F = 2$ ஆகின்றன.

\therefore கொடுக்கப்பட்ட பின்னம்

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 + x + 1)^2 (x + 1)^2} &= \frac{x - 2}{(x^2 + x + 1)} + \frac{3x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &\quad - \frac{1}{(x + 1)} + \frac{2}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ ஆனால் $\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ இப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும். அதை யொட்டி,

$$\frac{x^3}{(a-b)(a-c)(a-b)} = 0 \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$$

என்று எடுத்துக்கொள்.

$$\therefore x^3 = A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$$

$$x = a \text{ என்று கருதுவது, } A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}$$

$$x = b \text{ என்று கருதுவது, } B = \frac{b^3}{(b-a)(b-c)}$$

$$x = c \text{ என்று கருதுவது, } C = \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(x-a)} \\ + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{(x-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{(x-c)}$$

$x = d$ என எடுத்துக்கொள்,

$$\frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(d-a)} \\ + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} \cdot \frac{1}{(d-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \cdot \frac{1}{(d-c)}$$

$$\therefore \sum_{a,b,c,d} \frac{d^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$L(x+2)^3 + M(x+3)^3 = 1$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தகுந்த L, M -ஐத் தவிர்ப்போம். இதைப் பொட்டி $\frac{1}{(x+2)^3(x+3)^3}$ -ஐப் பகுப்பில் பிரிக்கலாகக் காண்போம்.

$$L = Ax + B$$

$$M = Cx^2 + Dx + E \text{ என எடுத்துக்கொண்டால்}$$

$$L(x+2)^3 + M(x+3)^3 = (Ax+B)(x+2)^3 \\ (Cx^2+Dx+E)(x+3)^3 \\ = 1.$$

$$\therefore (Ax+B)(x^3+6x^2+12x+8) + (Cx^2+Dx+E)(x^3+6x+9) = 1.$$

சமன்பாடு பொருத்தவரை இரண்டு பக்கங்களிலும் சமன்செய்தால்

$$A + C = 0.$$

$$6A + B + 6C + D = 0.$$

$$12A + 6B + 9C + 6D + E = 0.$$

$$8A + 12B + 9D + 6E = 0.$$

$$8B + 9E = 1.$$

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்வு காண்டால்

$$A = -8, B = -10, C = 8, D = 10, E = 9 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore L = -8x - 10.$$

$$M = 8x^2 + 10x + 9.$$

$$L(x+2)^2 + M(x+3)^2 = 1.$$

இரண்டு பக்கங்களைவும் $(x+2)^2(x+3)^2$ ஆல் வகுத்தால்

$$\frac{L}{(x+2)^2} + \frac{M}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2} &= \frac{-(8x+10)}{(x+2)^2} + \frac{(8x^2+10x+9)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-8(x+2)-1}{(x+2)^2} + \frac{8(x+2)^2-1(x+2)+1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-8}{(x+2)} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{8}{(x+2)} \\ &= \frac{8}{(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

எனவே, $\frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2}$ -ன் பகுதிப் பின்னங்கள்

$$\frac{-8}{(x+2)} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{8}{(x+2)} = \frac{8}{(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ -ஐத் தகுபின்னமாக்கி, அதன் பகுதிப் பின்னங்களைக் கண்டுபிடி. அதைப்பாட்டி.

$\frac{x^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$ -ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$$\frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)} = (x+A) + \frac{B}{(x-a)} + \frac{C}{(x-b)} + \frac{D}{(x-c)}$$

$$\therefore x^4 = (x+A)(x-a)(x-b)(x-c) + B(x-b)(x-c) + C(x-a)(x-c) + D(x-a)(x-b)$$

$x=a$ என $x=0$ செய்தால்,

$$a^4 = B(a-b)(a-c).$$

$$\therefore B = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)}$$

அடுத்த போது, நமது $x=b$ $x=c$ என $x=0$ செய்தால்,

$$C = \frac{b^4}{(b-a)(b-c)}$$

$$D = \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} \text{ ஆகும்.}$$

x^2 -ல் கெழுத்தை இருபடிபக்கங்களில் சமம் செய்தால்,

$$A - (a+b+c) = 0$$

$$\therefore A = (a+b+c)$$

$$\therefore \frac{x^4}{(x-a)(x-b)(x-c)} = x + (a+b+c) + \sum_{a,b,c} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{(x-a)}$$

$x=d$ ஆனால்,

$$\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = (a+b+c+d)$$

$$+ \sum_{a,b,c} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(d-a)}$$

$$\therefore \sum_{a,b,c} \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(d-a)} = (a+b+c+d) - \left[\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)} \quad \text{என்று,}$$

$$\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + \frac{AB^2}{(ax+b)} \\ + \frac{B^2}{(cx+d)} \quad \text{என்று காட்டுக.}$$

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)}$$

$$\therefore \frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{(ax+b)} \left[-\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} \right] \\ = \frac{A}{(ax+b)^2} + B \left[\frac{1}{(ax+b)(cx+d)} \right] \\ = \frac{A}{(ax+b)^2} + B \left[-\frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(cx+d)} \right]$$

$$\frac{1}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + \frac{B^2}{(ax+b)(cx+d)} \\ = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + B^2 \left[-\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} \right] \\ = \frac{A}{(ax+b)^2} + \frac{AB}{(ax+b)^2} + \frac{AB^2}{(ax+b)} + \frac{B^2}{(cx+d)}$$

பயிற்சி 1

பின்வருவனவற்றைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்கவும்.

1. $\frac{2x+5}{(x-1)(x-2)}$

2. $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$

3. $\frac{2x-2}{(x-1)(x-2)}$

4. $\frac{7-19x}{(x-1)(x+2)(x-2)}$

5. $\frac{2x-2}{(x-1)(2x+1)(x+2)}$

6. $\frac{7x-4}{(x^2-1)(x^2+6x+8)}$

7. $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 8. $\frac{x^3}{(1+2x)(1+3x)}$
9. $\frac{2x^2+5}{(x-1)^2(x-2)}$ 10. $\frac{1}{(1+x)^2(1-x)}$
11. $\frac{1}{x^2(x+2)}$ 12. $\frac{8-2x-x^2}{(1+x)(1-2x-3x^2)}$
13. $\frac{1-x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$ 14. $\frac{1}{(1-2x)^2(1-3x)}$
15. $\frac{x^2-5}{(x-1)^2(x-2)}$ 15. $\frac{2x^2-3x^2+4x-5}{(1-x)^2}$
17. $\frac{(2x-3)(1-5x)(3x+1)}{(4x-1)^2}$ 18. $\frac{x-1}{(1-x)^2(1+x^2)}$
19. $\frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)}$ 20. $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$
21. $\frac{5x^2-2x+4}{(x+1)(x^2-2x+3)}$ 22. $\frac{2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$
23. $\frac{x^2+x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}$ 24. $\frac{x^2-12x-12}{(x+2)^2(x^2+1)}$
25. $\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}$ 26. $\frac{x^2+4x-12}{(2-x^2)(4+x^2)}$
27. $\frac{x^2-5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+2)} + \frac{c}{(x+3)}$

என்ற பகுப்பாய்வாக a, b, c -ஐக் காண்க.

28. $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx}$ என்க.

$\frac{1}{(1-ax)^2(1-bx)} = \frac{A}{(1-ax)^2} + \frac{AB}{(1-ax)} + \frac{B^2}{(1-bx)}$

என்க. பகுப்பாய்வாக $\frac{1}{(1-x)^2(1-2x)}$ என்ற பகுப்பாய்வாகக் காண்க.

29. $\frac{8y^2 - 2y + 1}{y^3 - 8y^2 + 2y}$ என்ற கோவைகளை $\frac{A}{(y-2)} + \frac{B}{(y-1)(y-2)}$
 $+ \frac{C}{y(y-1)(y-2)}$ என்ற அமைப்பிற் கொண்டால்
 A, B, C -ன் மதிப்புகள் காண்க.

30. $\frac{8y+1}{(y+2)(y+3)(y+4)}$ என்ற கோவையை $\frac{A}{y+2}$
 $+ \frac{B}{(y+2)(y+3)} + \frac{C}{(y+2)(y+3)(y+4)}$ என்ற
 அமைப்பிற் கொண்டால் A, B, C -ன் மதிப்புகள் காண்க.

31. $\frac{x+5}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ என்ற கோவையை $\frac{A}{x} + \frac{B}{x(x+1)}$
 $+ \frac{C}{x(x+1)(x+2)} + \frac{D}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ என்ற
 அமைப்பிற் கொண்டால் A, B, C, D -ன் மதிப்புகளைக்
 காண்க.

2. சுருறுப்புத் தேற்றம்— அளவுக்கிணங்கிய படி களுக்கு (Binomial Theorem For Rational Index)

2-1. சுருறுப்புச் சார்புக்கு எத்தனை படி (power) இருக்காது அதை விசேஷப்படுத்தி ஒரு தொடராக எழுதலாம். சுருறுப்புத் தேற்றம் இதற்கு மிகவும் உதவுகிறது. புதுமுக வகுப்பில் சுருறுப்புச் சார்பின் படி ஒரு கூட்டு முழு எண் எனக் கொண்டு இத் தேற்றம் நிறுத்திக்கப்பட்டது. 'n' ஒரு கூட்டு முழு எண்ணானால் $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + {}^nC_{n-1} x a^{n-1} + a^n$ என நிறுத்திக்கப்பட்டது. (1)

இந்த வரிசையின் கடைசி உறுப்பு ${}^nC_n a^n$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} \text{அதேபோல் } (x-a)^n &= x^n + {}^nC_1 x^{n-1} (-a) + {}^nC_2 x^{n-2} (-a)^2 \\ &+ \dots + {}^nC_r x^{n-r} (-a)^r + \dots + {}^nC_n (-a)^n. \\ &= x^n - {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + (-1)^{r-1} {}^nC_r x^{n-r} a^r + \dots \\ &+ (-1)^n {}^nC_n a^n \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

இந்த வரிசையின் கடைசி உறுப்பு $(-1)^n {}^nC_n a^n$. எனவே n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கும்போது நமக்கு (n+1) உறுப்புகளும், அவ் வரிசையின் கடைசி உறுப்பும் கிடைக்கிறது. மேலும் நாம் அத்தொடரின் (n+1) உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும் காண முடியும்.

மேற் கூறிய வரிசையின் (1), (2)-ல் n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக எடுத்துக்கொண்டு $x=1$; $a=x$ அல்லது $-x$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \dots + {}^nC_r x^r + \dots + {}^nC_n x^n \\ (1-x)^n &= 1 - {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - {}^nC_3 x^3 + \dots + (-1)^{r-1} {}^nC_r x^r + \dots \\ &+ (-1)^n {}^nC_n x^n \end{aligned}$$

என்ற தொடர்தான் கிடைக்கும். இவை எல்லாம் தாம் பழங்க வகுப்பில் படித்து இருக்கிறோம்.

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இல்லாமல் ஏதாவது ஓர் அளவுக்கணக்கிய மெல் எண்ணாக இருப்பின், அத்துடன் $-1 < x < +1$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கிணங்க,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}x^r + \dots \dots \text{சத்தழி வரை}$$

என்ற சுருதப்புத் தேற்றம் ஒப்புக்கொள்ளப்பட்டு அதன் விரிவு களையும் கூட்டுத் தொகையையும், இவ்வத்தியாயத்தில் பாசிப் போம். சுருதப்புத் தேற்றத்தை மூன்றாம் பகுதியில் நிரூபிக்கலாம்.

n ஓர் அளவுக்கணக்கிய மெல்பெண்ணாக இருப்பின் $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அத்தொடர் மூடியிலுள்ள தொடராதிரு.

$n = \frac{1}{2}$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \\ = \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \dots \dots \text{என்ப}$$

போலக் கொண்டு இருக்கும். ஒரு படிவுக்கு வாராது.

$n = -2$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ = \frac{(-2)(-3)(-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots \dots \text{என்ப}$$

போலக் கொண்டு இருக்கும்.

$$\text{ஆகையால் } 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots \dots + \dots \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}x^r + \dots \dots$$

என்ற தொடர் ஒரு சத்தழித் தொடராதிரு. சில சமயங்களில் இக் சத்தழித் தொடரின் கூட்டுத்தொகை ஒரு நிப்டமன

என்னாலும், அப்போது நாம் அத்தொடர் குவிவிறது (convergent) என்கிறோம்.

அத்தொடரின் கூட்டுத் தொகை, சுத்தழிவை அடை யுமானால் அத்தொடர் விரிவிறது (Divergent) என்று கூறுகிறோம். இவைகளைப் பற்றி நாம் மூன்றாம் பகுதியில் பாச்ப்போம்.

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்குமானகில் $(n+1)$ உறுப்புக் கள் திடைக்கின்றன. எனவே அத்தொடரின் கூட்டுத் தொகை $(n+1)$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். அது ஒரு திட்டமான என்னாலும், எனவே நாம், n ஒரு கூட்டு முழு என்னாலும் அத்தொடர் குவிவிறது என்று கூறுகிறோம்.

n , ஓர் அளவுக்கிணக்கிய என்னாலும், $|x| < 1$, என்ற கூட்டுப்பாட்டிற்குச் சில விரிவுகளைப் பாச்ப்போம்.

2.2 $n = -1$ எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &= 1 + \frac{(-1)}{1} x + \frac{(-1)(-1-1)}{2} x^2 \\ &+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{6} x^3 + \dots \text{சுத்தழி வரை} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \text{சுத்தழி வரை.}\end{aligned}$$

$n = -1$, x -க்குப் பதில் $-x$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned}(1-x)^{-1} &= 1 + \frac{(-1)(-x)}{1} + \frac{(-1)(-1-1)}{2} (-x)^2 \\ &+ \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{6} (-x)^3 + \dots \text{சுத்தழி வரை} \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{சுத்தழி வரை.}\end{aligned}$$

$n = -4$ என எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned}(1+x)^{-4} &= 1 + \frac{(-4)}{1} x + \frac{(-4)(-4-1)}{2} x^2 \\ &+ \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{6} x^3 + \dots \text{சுத்தழி வரை}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{4}{1}x + \frac{4 \cdot 5}{2}x^2 + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6}x^3 + \dots \dots \text{சுத்ததழி வரை.}$$

$n = \frac{5}{2}$ எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{5}{2}} &= 1 + \frac{(\frac{5}{2})}{1}x + \frac{(\frac{5}{2})(\frac{5}{2}-1)}{2}x^2 + \\ &\quad \frac{(\frac{5}{2})(\frac{5}{2}-1)(\frac{5}{2}-2)}{6}x^3 + \dots \dots \text{சுத்ததழி வரை.} \\ &= 1 + \frac{(\frac{5}{2})}{1}x + \frac{(\frac{5}{2})(\frac{1}{2})}{2}x^2 + \frac{(\frac{5}{2})(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{6}x^3 + \\ &\quad \dots \dots \text{சுத்ததழி வரை.} \\ &= 1 + \frac{5}{2}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5 \cdot 1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{5 \cdot 1 \cdot (-1)}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ &\quad \dots \dots \end{aligned}$$

$n = -\frac{p}{q}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$\begin{aligned} (1+x)^{-\frac{p}{q}} &= 1 + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)}{1}x + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)}{2}x^2 + \\ &\quad \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)\left(-\frac{p}{q}-2\right)}{6}x^3 + \dots \dots \\ &= 1 - \frac{p}{q}\left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2}\left(\frac{x}{q}\right)^2 \\ &\quad - \frac{p(p+q)(p+2q)}{6}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots \text{சுத்ததழி வரை} \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r p(p+q)(p+2q) \dots (p+r-1q)}{r!} \left(\frac{x}{q}\right)^r \\ &\quad \dots \dots \dots (A) \end{aligned}$$

$n = \frac{p}{q}$; x -க்குப் பதில் $-x$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$$\begin{aligned}
 (1-x)^{-\frac{p}{q}} &= 1 + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)(-x)}{\underline{1}} + \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)(-x)^2}{\underline{2}} \\
 &\quad - \frac{\left(-\frac{p}{q}\right)\left(-\frac{p}{q}-1\right)\left(-\frac{p}{q}-2\right)(-x)^3}{\underline{3}} + \dots \dots \infty \text{ வரை} \\
 &= 1 + \frac{p}{\underline{1}} \frac{x}{q} + \frac{p(p+q)}{\underline{2}} \left(\frac{x}{q}\right)^2 \\
 &\quad + \frac{p(p+q)(p+2q)}{\underline{3}} \left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots \dots \infty \text{ வரை} \\
 &= 1 + \sum_1^{\infty} \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+r-1q)}{\underline{r}} \left(\frac{x}{q}\right)^r \dots (B)
 \end{aligned}$$

(1) ஆவது உறுப்பை $r+1$ எனக் குறிப்பிட்டால்

$$(A)\text{-ல் } r+1 = (-1)^r \frac{p(p+q)\dots(p+r-1q)}{\underline{r}} \left(\frac{x}{q}\right)^r$$

$$(B)\text{-ல் } r+1 = \frac{p(p+q)\dots(p+r-1q)}{\underline{r}} \left(\frac{x}{q}\right)^r$$

(A), (B)-இவ்விரண்டு தொடர்களும், முடிவில்லாத எழுறுப்புத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை அறிய மிகவும் உதவுகின்றன. எனவே நாம் இவற்றின் அமைப்பைப் பற்றிக் கவனிப்போம்.

(1) மேலெண்கள் $p(p+q)(p+2q)\dots$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனக்கூறக் கூடியன. இக் கூட்டுத் தொடர் இரண்டாவது உறுப்பிலிருந்து ஆரம்பம் ஆகிறது. இக் கூட்டுத் தொடரின் பொது வேறுபாடு q

இரண்டாவது உறுப்பில் மேலெண் p

மூன்றாவது உறுப்பில் மேலெண் $p(p+q)$

நான்காவது உறுப்பில் மேலெண் $p(p+q)(p+2q)\dots$ என அமைந்துள்ளன.

(ii) கீழெண்கள் $|0| = 1, |1| = 1, |2| = 1, |3| = 1, \dots$ என்று அமைந்துள்ளன.

(iii) $\frac{x}{q}$ என்ற இராசி $0, 1, 2, 3, \dots$ என்ற படிவங்களைக் கொண்டுள்ளன.

(iv) $(1-x)^{-p/q}$ என்ற தொடரில் எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டல் குறியைப் பெற்றுள்ளன.

$(1+x)^{-p/q}$ என்ற விரிவில் கூட்டல் குறியும், கழித்தல் குறியும் மாறி மாறி வருகின்றன.

இந்த தான்கு அமைப்புகளையும் கொண்ட ஒரு கத்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை மிக எளிதாகக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கீழ்க்கண்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1.8}{8.8} + \frac{1.8.5}{8.8.9} + \dots \text{ கத்தழி வரை.}$$

இத் தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S எனக் கொண்டால்

$$S = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1.8}{8.8} + \frac{1.8.5}{8.8.9} + \dots \infty.$$

இத் தொடரில் எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டல் குறியைப் பெற்றுள்ளன. எனவே இத்தொடர் $(1-x)^{-p/q}$ என்ற அமைப்பில் இருக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} \therefore S &= 1 + \frac{1}{8 \cdot \frac{1}{1}} + \frac{1.8}{8 \cdot 8} + \frac{1.8.5}{8 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{1}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{(1)(8)}{\frac{1}{1} \cdot 8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(1)(8)(5)}{\frac{1}{1} \cdot 8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots \text{ கத்தழி வரை,} \end{aligned}$$

இதை $(1-x)^{-p/q}$ -ன் விரிவுடன் ஒப்பிட்டுப் பாசித்தால்,

$$p(p+q)(p+q) \dots = 1.8.5 \dots$$

எனவே $p=1$, $q=2$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{2}, \quad q=2. \quad \therefore x = \frac{2}{2}$$

$$\therefore S = \left(1 - \frac{2}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \sqrt{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 8} + \dots \text{ சுத்தநிலை} = 1$$

என்று நிரூபிக்க.

இடப் பக்கம், S என்று எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 8} + \dots \dots \infty. \\ &= \frac{1}{\underline{2} \cdot \underline{2}} + \frac{1 \cdot \underline{2}}{\underline{2} \cdot \underline{2}^2} + \frac{1 \cdot \underline{2} \cdot \underline{5}}{\underline{2} \cdot \underline{4} \cdot \underline{2}^2} + \dots \dots \infty. \\ &= \frac{(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{4}} + \dots \dots \infty. \end{aligned}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(\frac{1}{2})$ ஆல் பெருக்க.

$$\frac{1}{2} S = \frac{(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{4}} + \dots \dots \infty$$

$$\therefore \frac{1}{2} S = - \left[\frac{(-\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(-\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(-\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{4}} + \dots \dots \text{சுத்தநிலை வரை} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S &= - \left[1 + \frac{(-\underline{1})}{\underline{1}} + \frac{(-\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} + \frac{(-\underline{1})(\underline{1})(\underline{1})}{\underline{2}} \right. \\ &\quad \left. + \dots \dots \text{சுத்தநிலை வரை} \right] + \left[1 + \frac{(-\underline{1})}{\underline{1}} \right] \end{aligned}$$

வலப் பக்கம் முதல் ஆடைப்புக் குறியில் உள்ள சுத்தநிலை தொடரில்

$$p = \frac{1}{2}; q = 1; \frac{x}{q} = 1.$$

$$\therefore x = 1.$$

$$\therefore \frac{1}{2} S = - [(1-1)^{(-\frac{1}{2})}] + \left[1 + \frac{(-1)}{1} \right]$$

$$\frac{1}{2} S = - [0] + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = 1.$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகை 1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கீழ்க்கண்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \frac{1.4.7.10}{5.10.15.20} - \dots \text{சுத்தழி வரை.}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரை S என்ற எடுத்துக்கொண்டால்

$$S = \frac{1.4}{5.10} - \frac{1.4.7}{5.10.15} + \frac{1.4.7.10}{5.10.15.20} - \dots \text{சுத்தழி வரை}$$

$$= \frac{(1)(4)}{5.10} - \frac{(1)(4)(7)}{5.10.15} + \frac{(1)(4)(7)(10)}{5.10.15.20} - \dots \text{சுத்தழி வரை.}$$

$$= \frac{(1)(4)}{5.10} - \frac{(1)(4)(7)}{5.10.15} + \frac{(1)(4)(7)(10)}{5.10.15.20} - \dots \text{சுத்தழி வரை.}$$

இத்தொடரில் ஏதாவதும் ஓர் உறுப்பை எடுத்துக்கொண்டு அத்தொடரின் அமைப்பை ஆராய்வோம். மூன்றாவது உறுப்பு r_3 -ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$r_3 = \frac{(1)(1+1 \times 3)(1+2 \times 3)(1+3 \times 3)}{4} \left(\frac{1}{5} \right)^4$$

$$p = 1 \quad q = 3.$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{5} \quad \therefore x = \frac{3}{5}$$

S -ன் உறுப்புகள் மாறி மாறி கூட்டல் குறி, சுத்தத்தல் குறிகளைப் பெற்று இருப்பதால் S ஆனது $(1+x)^{-p/q}$ என்ற அமைப்பில் இ.க. = 3

$$\begin{aligned}\therefore \frac{U_{r+1}}{U_r} &= \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} x = \frac{n-r+1}{r} x, \\ &= \left(\frac{n+1}{r} - 1 \right) x\end{aligned}$$

இப்போது $\left(\frac{n+1}{r} - 1 \right)$ என்பது கூட்டு மதிப்பையும், குறை மதிப்பையும் எவ்வெப்பொழுது அடைகின்றது என்பதைக் காண்போம்.

$n+1 < 0$ ஆக இருப்பின்.

r -ன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $\left(\frac{n+1}{r} - 1 \right)$ குறை மதிப்பைப் பெறுகின்றது.

$n+1 > 0$ ஆக இருந்தால், ' $n+1$ '-ஐ விட ' r ' மிகுத்திருக்கும் போது $\left(\frac{n+1}{r} - 1 \right)$ குறை மதிப்பை அடைகின்றது.

$n+1 > 0$ ஆக இருந்தால், ' $n+1$ '-ஐ விட ' r ' குறைத்திருக்கும்போது $\left(\frac{n+1}{r} - 1 \right)$ கூட்டு மதிப்பை அடைகின்றது.

எனவே,

1. x கூட்டு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்போது,

(i) $n < -1$ ஆக இருப்பின் r -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

(ii) $n > -1$ ஆக இருப்பின் r -ன் $n+1$ -ஐ விட மிகுத்திருக்கும் மதிப்புகளுக்கும்,

U_{r+1} -ம் U_r -ம் வெவ்வேறு குறிகளைப் பெற்றிருக்கும்.

அதாவது மேற்கூறிய கூட்டுப்பாடுகளில் $(1+x)^n$ -ல் உள்ள உறுப்புகளின் குறிகள் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்திலிருந்து முன்னத்திற்கும் பின்னத்திற்கும் மாறி மாறி வரும்.

II. x குறை மதிப்பைப் பெற்றிருக்கும்போது.

(i) $n < -1$ ஆக இருக்கும்போது $(1+x)^n$ -ன் விரிவத்தில் உறுப்புகள் யாவும் கூட்டுக் குறியைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $n > -1$ ஆக இருக்கும்போது $(1+x)^n$ -ன் விரிவத்தில் r ஆவது உறுப்பினிற்குப் பின் வரும் உறுப்புகள் யாவும் r ஆவது உறுப்பின் குறியையே பெற்றுவரும். சுண்டு $r, n+1$ -க்கு அடுத்த முதல் முழு எண்ணாகும்.

2.4. $(1+x)^n$ -ன் விரிவத்தில் மட்டளவில் பெரிய உறுப்பு

U_r என்பது r ஆவது உறுப்பு என்க.

U_{r+1} என்பது $r+1$ ஆவது உறுப்பு ஆகும்.

$|U_r|$ என்பது U_r -ன் மட்டளவு.

$$\therefore \frac{|U_{r+1}|}{|U_r|} = \left| \frac{n-r+1}{r} \right| |x| = \frac{|n-r+1|}{|r|} |x|.$$

I. $-1 < n < 0$: இக் கட்டுப்பாட்டில் $-n+r-1 > 0$

$$\therefore \left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| = -\frac{n+r-1}{r} \cdot |x|.$$

ஆனால், $|x| < 1$. மேலும் $r = (r-1) + 1 > (r-1)-n$
 $[\because -1 < n < 0]$

$$\therefore \left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| < |x| < 1$$

$$\therefore |U_{r+1}| < |U_r|$$

எனவே, $|U_2| > |U_1| > |U_0| > \dots$

$\therefore (1+x)^n$ -ன் முதல் உறுப்புகள் மட்டளவிற்பெரிய உறுப்பாகும்.

II. $n < -1$: இக் கட்டுப்பாட்டில் $-n-1+r > 0$

$$\text{எனவே, } \left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| = \frac{-n-1+r}{r} \cdot |x|$$

$\therefore \left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $\frac{r-1-n}{r} |x| \geq 1$ என்ற இருப்பதைப் பொருத்தது.

(ஆதாவது) $\left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $\frac{-n-1}{r} + 1 \geq \frac{1}{|x|}$ என்ற இருப்பதைப் பொருத்தது.

$\left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $\frac{-(n+1)}{r} \geq \frac{1-|x|}{|x|}$ என்ற இருப்பதைப் பொருத்தது.

$\left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $-(n+1) \geq \frac{1-|x|}{|x|} \cdot r$ என்ற இருப்பதைப் பொருத்தது.

$\left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $r \leq \frac{|x|(-n-1)}{1-|x|}$ என்ற இருப்பதைப் பொருத்தது.

$\frac{|x|(-n-1)}{1-|x|}$ என்பதைக் கவனிக்க. இதை $i+k$ என்று எழுதலாம். k என்று i என்பது ஒரு தேர் முழு எண். k என்பது $0 < k < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமையும்.

எனவே $\left| \frac{U_{r+1}}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $r \leq i+k$ என்ற இருப்பதைப் பொருத்தது.

ஆதாவது, (i) $i+k$ விற்குக் குறைந்த r -ன் மதிப்புகளுக்கு

$$|U_{r+1}| > |U_r|$$

$$\therefore |U_{i+1}| > |U_i| > |U_{i-1}| > \dots > |U_1|.$$

(ii) $i+k$ விற்கு மிகுந்த r -ன் மதிப்புகளுக்கு $|U_{r+1}| < |U_r|$. 'r' இக் கட்டுப்பாட்டில் எடுக்கக் கூடிய மதிப்புகள் $i+1, i+2, i+3, \dots$

எனவே, $|U_{i+1}| > |U_{i+2}| > |U_{i+3}| > \dots \dots \dots$

எனவே, $i + 1$ ஆவது உறுப்புதான் மட்டளவிற் பெரிய உறுப்பாகும்.

$$\text{இனி } \frac{|x|}{1-|x|} \frac{(-n-1)}{r} = 1 \text{ ஆக இருப்பின் } r = 1.$$

$$\therefore |U_{i+1}| = |U_i|$$

எனவே $i + 1$, i என்பவைகள்தாம் மட்டளவிற் பெரிய உறுப்புகள்.

$$\text{III. } n > 0: \text{ இக்கட்டுப்பாட்டில் } n-r+1 \begin{matrix} \geq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

$$\therefore \left| \frac{U_{i+1}}{U_i} \right| \begin{matrix} \geq 1 \\ < 1 \end{matrix} \text{ என்பது } \frac{|n-r+1|}{r} |x| \begin{matrix} \geq 1 \\ < 1 \end{matrix} \text{ என்ற} \\ \text{இருப்பதைப் பொருத்தது.}$$

$$\text{" " } \left| \frac{n+1}{r} - 1 \right| |x| \begin{matrix} \geq 1 \\ < 1 \end{matrix} \text{ என்ற} \\ \text{இருப்பதைப் பொருத்தது.}$$

p -என்பதை $p < n+1 < p+1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைத்த நேரீ முழு எண் என்க.

$$r > p \text{ ஆக இருக்கும்போது } \frac{p}{r} < 1$$

$$\therefore \left| \frac{n+1}{r} - 1 \right| < 1 \quad [\because p < n+1 < p+1]$$

$$\text{மேலும் } |x| < 1 \quad \therefore \left| \frac{n+1}{r} - 1 \right| |x| < 1$$

$$\therefore \left| \frac{U_{i+1}}{U_i} \right| < 1$$

$$\text{எனவே } r > p \text{ என்ற கட்டுப்பாட்டில் } |U_{i+1}| < |U_i|$$

$$\text{அதாவது } p \text{ ஐ விடப் பெரிய } r\text{-ன் மதிப்புகளுக்கு} \\ |U_{i+1}| < |U_i|$$

$$\therefore |U_{p+1}| > |U_{p+2}| > \dots \dots \dots$$

$r < p$ ஆக இருப்பின் :

$$\frac{n+1}{r} - 1 > 0$$

$\therefore \left| \frac{U_r+1}{U_r} \right| \geq 1$ என்ற இருப்பது $\left(\frac{n+1}{r} - 1 \right) |x| \geq 1$
என்று இருத்தலில் பொருத்தது.

“ “ “ $\frac{n+1}{r} \leq \frac{1+|x|}{|x|}$
என்று இருத்தலில் பொருத்தது

“ “ “ $r \leq \frac{(n+1)|x|}{1+|x|}$
என்று இருத்தலில் பொருத்தது.

மூன் பேராவே $\frac{(n+1)|x|}{1+|x|} = i+k$ எனப் பிரித்து $(i+1)$
ஆவது உறுப்பு மட்டு மதிப்பிற் பெரியது என்பதைக் காணலாம்.

$$\frac{(n+1)|x|}{1+|x|} = i \text{ ஆக இருக்கும்போது,}$$

$|U_{i+1}| = |U_i|$. இவைகளுதரம் மட்டு மதிப்பிற் பெரியவை.

2-5. குவித் தொடர் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை

தேற்றம்: “ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ என்ற கத்தழித் தொடர் ஒர் அறக் குவித் தொடராலின் மூலம் $(r+1)$ கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையாகிய $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r$, $\frac{f(x)}{1-x}$ -ன் விரிவத்தின் x^r -ன் கெழுவிற்ஞர் சமம்.”

மேய்ப்பாடு :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனவே,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{1-x} &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots \dots) \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots \dots \dots\end{aligned}$$

எனவே,

$$\frac{f(x)}{1-x} \text{-ன் விரிவத்தில் } x^r \text{-ன் கெழு } (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_r)$$

ஆகும்.

மேற்கண்ட மெய்ப்பாட்டில், இரு அங்குலித் தொடர்களின் பெருக்கலாற் கிடைக்கும் தொடரும் ஒரே அங்குலித் தொடர்தான் என்ற உண்மையையும்கூட, அப்படிக்கிடைக்கும் அங்குலித் தொடர் குவிவழி சாசுபு எடுத்துக்கொண்ட அங்குலித் தொடர்கள் தனித் தனியே குவிவழி சாசுபுகளின் பெருக்கற் பயனிற்குச் சமம், என்ற உண்மையையும்கூடப் பயன்படுத்தி உகனோம்.

2-6. பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்

n ஒரு விகிதமுறு எண்ணுயின்,

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \dots)^n \\ &= a_0^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots \dots \right)^n \\ &= a_0^n \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n}{r} (p_1x + p_2x^2 + \dots) \right\}\end{aligned}$$

$$\text{இங்கு } p_r = \frac{a_r}{a_0}.$$

2. தேராய மதிப்புகள்

$|x|$ -ன் மதிப்பு மிக மிகச் சிறியதாக இருந்தால் அதன் படி அதிகமாகும்போது அதன் மதிப்பு மிக மிகச் சிறியதாகிறது. $|x| = \frac{1}{2}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் $|x|^2 = \frac{1}{4}$, $|x|^3 = \frac{1}{8}$... எனக் குறைந்து கொண்டே வரும். எனவே அச் சிறிய மதிப்புகள் எடுத்துக்கொள்ளத் தேவையெல்லாத அளவிற்கு இருக்கும். அந் நிலையில் நாம், நமக்கு எந்த அளவுக்கு வேண்டுமோ அந்த அளவுக்குத் தேராய மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

பயிற்சி சிபிபாசகியுப்பின்

$$\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} = 4 + 2x \text{ (தேர்வுபாசக)}$$

என நிறுவுக.

$$\begin{aligned} \text{மேலே} \quad (1-2x)^{-\frac{1}{2}} &= (1+2x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} 2x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{2} (2x)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{6} (2x)^3 + \dots \dots \text{அத்தி வரை} \right] \\ &= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} 2x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{2} (2x)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{6} (2x)^3 + \dots \dots \text{அத்தி வரை} \right] \\ &= 2x^2 + 2x^3 + \dots \dots \text{அத்தி வரை.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{கீழே} \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{2} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{6} x^3 + \dots \dots \text{அத்தி வரை} \right] \\ &= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} x + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{2} x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{6} x^3 + \dots \dots \text{அத்தி வரை} \right] \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3 + \dots \dots \text{அத்தி வரை} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{2x^2 + 2x^3}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3} \text{ (தேர்வுபாசக)} \\ &= \frac{2x^2(1+x)}{\frac{1}{2}x^2(1+\frac{1}{2}x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4(1+x)(1+\frac{1}{2}x)^{-1} \\
 &= 4(1+x)(1+\frac{1}{2}x) \\
 &\quad \text{(தொராயமாக)} \\
 &= 4 + 2x \text{ (தொராயமாக)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

p, q -உடன் ஒன்றிடுகிறபோது $(p+q)$ -ன் மதிப்பு மிகச் சிறியதாகின், $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}} = \text{தொராயமாக } \frac{(n+1)p + (n-1)q}{(n-1)p + (n+1)q}$ என நிறுவுக.

இதைப் பயன்படுத்தி $\left(\frac{181}{188}\right)^{\frac{1}{n}}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}} &= \frac{p}{q} = \frac{(p+q) + (p-q)}{(p+q) - (p-q)} \\
 \therefore \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left[\frac{(p+q) + (p-q)}{(p+q) - (p-q)} \right]^{\frac{1}{n}} \\
 &= \left[\frac{1 + \frac{p-q}{p+q}}{1 - \frac{p-q}{p+q}} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{1 + \frac{p-q}{p+q}}{1 - \frac{p-q}{p+q}} \right]^{\frac{1}{n}} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{n} \frac{p-q}{p+q} + \dots}{1 - \frac{1}{n} \frac{p-q}{p+q} - \dots}
 \end{aligned}$$

p, q இவைகளுடன் ஒன்றிடுகிறபோது $p+q$ சிறியதாகையால், $\frac{p-q}{p+q}$ சிறியதான். ஆகவே அதன் இரண்டு மூன்றாம் படிக்கான விரிப்புகளிட்டாக,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n(p+q) + (p-q)}{n(p+q) - (p-q)} \quad \text{(தொராயமாக)} \\
 &= \frac{(n+1)p + (n-1)q}{(n-1)p + (n+1)q} \quad \text{(தொராயமாக)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(n+1)p + (n-1)q}{(n-1)p + (n+1)q} \quad (\text{தேர்வுமறை})$$

$p = 181, q = 183, n = 7$ என்று எடு செய்தால்

$$\begin{aligned} \left(\frac{181}{183} \right)^{\frac{1}{7}} &= \frac{(7+1)181 + (7-1)183}{(7-1)181 + (7+1)183} \\ &= \frac{1048 + 798}{798 + 1084} \\ &= \frac{1846}{1882} = \frac{923}{941} \quad (\text{தேர்வுமறை}) \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

c ஆனது l -ஐ விடச் சிறியதாக இருப்பின்,

$$\left(\frac{l}{l+c} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{8c^2}{4l^3} \quad (\text{தேர்வுமறை})$$

என நிறுதி.

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{l+c} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{l}{l-c} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left[\frac{l}{l \left(1 + \frac{c}{l} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\frac{l}{l \left(1 - \frac{c}{l} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{c}{l} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{c}{l} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{(-\frac{1}{2})\frac{c}{l}}{1} + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2} \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{6} \left(\frac{c}{l} \right)^3 + \dots \dots \infty \right] \\ &\quad + \left[1 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{l}}{1} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{2} \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{6} \left(\frac{c}{l} \right)^3 + \dots \dots \infty \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 - \frac{c}{2l} + \frac{8}{9} \frac{c}{l^2} + \dots \infty \right] \\
&\quad + \left[1 + \frac{c}{2l} + \frac{8c^2}{8l^2} + \dots \dots \infty \right] \\
&= 2 + \frac{8c^2}{4l^2} \text{ (தெரையாக) } (c < l \therefore \frac{c}{l} < 1.
\end{aligned}$$

\therefore இதன் மூலக் கூறிலிருப்போது அதன் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போகும்).

எடுத்துக்காட்டு 7 :

n -ன் மதிப்பு மிகப் பெரிதாக இருந்தால்,

$$\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3}{2x} - 8x^3 + \frac{6^3}{16x^5} \text{ (தெரையாக) எனத் திறவுக.}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 4} &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \left[x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= x \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = x \left[1 + \frac{1}{2} \frac{4}{x^2} \right. \\
&\quad + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{4}{x^2} \right)^2 \\
&\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 2} \left(\frac{4}{x^2} \right)^3 + \dots \dots \infty \right] \\
&= x \left[1 + \frac{1}{2} \frac{4}{x^2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{1 \cdot 2} \left(\frac{4}{x^2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 2} \left(\frac{4}{x^2} \right)^3 + \dots \dots \infty \right] \\
&= x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} + \dots \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + 1} &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$= x \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \dots \dots \infty \right]$$

$$= x \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \dots \dots \infty \right].$$

$$= x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^5} \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+1} &= \left(x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} \dots \dots \right) \\ &\quad - \left(x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \frac{1}{16x^5} \dots \dots \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{x^3} \left(2 - \frac{1}{8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{x^5} \left(4 - \frac{1}{16} \right) + \dots \dots \\ &= \frac{3}{2x} - \frac{15}{8x^3} + \frac{63}{16x^5} \dots \dots \text{(தொடர்வமாக)} \end{aligned}$$

(x சிறியது. $\therefore \frac{1}{x}$ சிறியது. எனவே இதன் உயர்த்த படிக்கி விடப்பட்டன.)

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\frac{\sqrt{1+x}(4-3x)^{\frac{3}{2}}}{(8+5x)^{\frac{5}{2}}} \text{ -ஓ } x \text{ மிகச் சிறியதாக இருப்}$$

பின் $x^2, x^3 \dots \dots \dots$ ஆகியவற்றை நீக்கி, அதன் தொடர்வ மதிர்வைக் காட்டுக.

$$\frac{\sqrt{1+x}(4-3x)^{\frac{3}{2}}}{(8+5x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{5x}{8}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{5x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{5x}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}} \cdot (1 + \frac{1}{2}x + \dots) \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}x + \dots\right) \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5x}{8} + \dots\right] \\
&= 4 \left[1 + x\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{5}{8}\right)\right] \text{ நேரணமாக.} \\
&= 4 - \frac{10}{8}x \text{ (நேரணமாக).}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{80}{49}}$ ஆனால் $\sqrt{2}$ -ன் மதிப்பை 8 தசமத் தரையில்லுக்குக் காண்க.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{80}{49}} &= \left(1 - \frac{1}{80}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1 - .02)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{(\frac{1}{2})(.02)}{1} + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)}{2} (.02)^2 \\
&\quad + \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{6} (.02)^3 + \dots \dots \infty \\
&= 1 + .01 + .00015 + \dots \dots \\
&= 1.01015 \text{ நேரணமாக.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sqrt{2} &= \frac{7}{5} \sqrt{\frac{80}{49}} = \frac{7}{5} (1.01015) \\
&= 1.41421 = 1.414 \text{ நேரணமாக}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

கீழ்க்கண்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க :

$$\begin{aligned}
1. \quad &\frac{2}{6} + \frac{2.5}{6.12} + \frac{2.5.8}{6.12.18} + \dots \dots \infty \\
2. \quad &\frac{11.14}{10.16.20} + \frac{11.14.17}{10.16.20.26} + \frac{11.14.17.20}{10.16.20.26.30} \\
&\quad + \dots \dots \infty
\end{aligned}$$

$$3. \frac{2}{1} + \frac{2.5}{1.2} + \frac{1}{2} + \frac{2.5.7}{1.2.3} + \frac{1}{2^2} + \dots \dots \infty$$

$$4. \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5.7}{2.3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5.7.9}{2.3.4} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$5. \frac{5}{1.2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5.7}{1.2.3} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5.7.9}{1.2.3.4} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \dots \infty$$

$$6. \frac{2}{2.4} + \frac{3.4}{2.4.6} + \frac{3.4.5}{2.4.6.8} + \dots \dots \infty$$

$$7. 1 + \frac{10}{9} + \frac{10.16}{9.18} + \frac{10.16.22}{9.18.27} + \dots \dots \infty$$

$$8. \frac{5}{12} \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{5.9}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{5.9.11}{4} \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$1. S = \frac{2}{6} + \frac{2.5}{6.12} + \frac{2.5.8}{6.12.18} + \dots \dots \infty$$

$$= \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2.5}{12} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2.5.8}{18} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$\therefore S + 1 = 1 + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2.5}{12} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2.5.8}{18} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$= 1 + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{2(5)}{12} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2(5)(8)}{18} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$= 1 + \frac{p}{1} \left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2} \cdot \left(\frac{x}{q}\right)^2 + \dots \dots \infty$$

பகுதி 1 - சென்னைப் பல்கலைக் கழகம்

இங்கு $p = 2$, $q = 2$, $\frac{x}{q} = \frac{1}{2}$, $\therefore x = \frac{1}{2}$.

$$\therefore (S+1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$S+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore S = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 2^{\frac{1}{2}} - 1$$

$$2. S = \frac{11.14}{2.8.4} \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \frac{11.14.17}{2.8.4.6} \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \dots \infty$$

இதன் பக்கக்கணிப்பு 6.8, $\left(\frac{1}{8}\right)$ ஆகிய பெருக்கிலும்,

$$\begin{aligned} S. 6.8. \left(\frac{1}{8}\right) &= \frac{6.8.11.14}{1.2.8.4} \left(\frac{1}{8}\right)^4 \\ &+ \frac{6.8.11.14.17}{1.2.8.4.6} \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S. 8 &= \frac{6.8.11.14}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 \\ &+ \frac{6.8.11.14.17}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^5 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

இதன் பக்கக்கணியும், $1 + \frac{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{6.8}{1.2} \left(\frac{1}{8}\right)^2$
 $+ \frac{6.8.11}{1.8} \left(\frac{1}{8}\right)^3$ ஆக கூட்டுகையாகும்,

$$\begin{aligned} S.S + \left[1 + \frac{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{6.8}{1.2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \right. \\ \left. + \frac{6.8.11}{1.8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{6.8}{1.2} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ &+ \frac{6.8.11}{1.8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \frac{6.8.11.14}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^4 + \dots \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{வரை புறம் } (1-x)^{-p/q} &= 1 + \frac{p}{1} \left(\frac{x}{q} \right) \\ &+ \frac{p(p+q)}{12} \left(\frac{x}{q} \right)^2 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. இக்கு,

$$p = 5; \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{5}; \quad q = 8. \quad \therefore x = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \text{வரை புறத்தை } \left(1 - \frac{8}{5}\right)^{-1} \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore 8.5 + \left[1 + \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{5} \right) + \frac{5.5}{12} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{5.5.11}{12} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^3 \right] \\ = \left(1 - \frac{8}{5} \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$8.5 + 2 + \frac{4}{5} + \frac{44}{75} = \left(\frac{5}{5} \right)^{-1} = \left(\frac{5}{2} \right)^1$$

$$8.5 + \frac{264}{75} = \sqrt[3]{\frac{8125}{32}}$$

$$\therefore 8.5 = \sqrt[3]{\frac{8125}{32}} - \frac{264}{75}$$

$$\therefore S = \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{8125}{32}} - \frac{127}{300}$$

$$\begin{aligned} 8. S &= \frac{8}{11} \cdot 1 + \frac{8.5}{12} \cdot \left(\frac{1}{8} \right) \\ &+ \frac{8.5.7}{12} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் $\left(-\frac{1}{8}\right)$ ஆக பெருக்க,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \cdot S &= \frac{8}{1} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \\ &\quad + \frac{8 \cdot 6 \cdot 7}{8} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^3 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் 1 ஐக் கூட்ட,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{8} \cdot S &= 1 + \frac{8}{1} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \\ &\quad + \frac{8 \cdot 6 \cdot 7}{8} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^3 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{வலப் புறத்தை } 1 + \frac{p}{1} \left(\frac{x}{q}\right) + \frac{p(p+q)}{2} \left(\frac{x}{q}\right)^2 \\ + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

என்ற தொடருடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது,

$$p = 8; \quad q = 2; \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{8}, \quad \therefore \quad x = \frac{2}{8}$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \text{ வலப் புறத்தை } (1-x)^{-\frac{p}{q}} = \left(1 - \frac{2}{8}\right)^{-\frac{8}{2}}$$

என்று எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} \therefore 1 + \frac{1}{8} S &= \left(1 - \frac{2}{8}\right)^{-\frac{8}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{8}{2}} = (2)^{\frac{8}{2}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore S = 2[2\sqrt{2} - 1]$$

$$4. \quad S = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 8} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 8 \cdot 4} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots \dots \infty$$

இதன் ④ பதிலிடும்படி 3. $\left(\frac{1}{8} \right)$ ஆக பெருக்க,

$$S \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{8 \cdot 5}{1 \cdot 8} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{8 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 8} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \frac{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4} \left(\frac{1}{8} \right)^4 + \dots \dots \infty$$

$$S = \frac{8 \cdot 5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{8 \cdot 5 \cdot 7}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \frac{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^4 + \dots \dots \infty$$

+ 1 $\frac{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)$ ஐ இதன் ④ பதிலிடும்படியும் கூட்டினால்

$$S + \left[1 + \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{8} \right] = 1 + \frac{8}{1} \left(\frac{1}{8} \right) + \frac{8 \cdot 5}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{8 \cdot 5 \cdot 7}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$= 1 + \left[\frac{p}{1} \left(\frac{x}{q} \right) + \frac{p(p+q)}{2} \left(\frac{x}{q} \right)^2 + \dots \dots \infty \right]$$

$$= (1-x)^{-p-q},$$

$$\text{இங்கு } p=3; q=2; \frac{x}{q} = \frac{1}{8}, \quad \therefore x = \frac{2}{8}.$$

$$\therefore S + \left[1 + \frac{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{8} \right) \right] = \left(1 - \frac{2}{8} \right)^{-4} \\ = \left(\frac{1}{8} \right)^{-4} = (8)^2$$

$$S + 2 = 8\sqrt{8}.$$

$$\therefore S = 8\sqrt{8} - 2.$$

$$6. \quad S = \frac{8}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{8.7}{1.2.3} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ + \frac{8.7.9}{1.2.3.4} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$\therefore S = \frac{8.5}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{8.6.7}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \dots$$

$$\therefore S + \left[1 + \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{2}\right] = 1 + \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{2} \\ + \frac{8.5}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{8.6.7}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \dots \infty.$$

$$S + \left[1 + \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{2}\right] = (1-x)^{-1/2}$$

$$\text{இங்கு } p=8; \quad q=2; \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{2}{8}.$$

$$\therefore S + 2 = \left(1 - \frac{2}{8}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = (2)^{1/2}$$

$$\therefore S = 2^{1/2} - 2.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} [2^{1/2} - 2].$$

$$6. \quad S = \frac{8}{2.4} + \frac{8.4}{2.4.6} + \frac{8.4.6}{2.4.6.8} + \dots \dots \infty$$

$$S = \frac{8.8}{1.2} \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{8.8.4}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ + \frac{8.8.4.6}{1.4} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$S + \left[1 + \frac{8}{1} \cdot \frac{1}{2}\right] = 1 + \frac{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ + \frac{8.8}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{8.8.4}{1.2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \dots \infty$$

$$= (1-x)^{-1/2}, \text{ இங்கு,}$$

$$p = 2; q = 1; \frac{x}{q} = \frac{1}{2}. \quad \therefore x = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore 2S + \left[1 + \frac{2}{1}, \frac{1}{2} \right] = \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{-1} \\ = \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} = 2^1$$

$$2S + [1 + 1] = 4.$$

$$2S = 4 - 2 = 2.$$

$$\therefore S = 1.$$

$$7. S = 1 + \frac{10}{9} + \frac{10.16}{9.18} + \frac{10.16.22}{9.18.27} + \dots \dots \infty$$

$$= 1 + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{10.16}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^2 \\ + \frac{10.16.22}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^3 + \dots \dots \infty$$

$$= (1-x)^{-1/2} \text{ உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்}$$

$$p = 10; q = 9; \frac{x}{q} = \frac{1}{9} \quad \therefore x = \frac{9}{9} = \frac{9}{9}.$$

$$\therefore S = \left(1 - \frac{9}{9} \right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{9} \right)^{-1/2} = (9)^{1/2}$$

$$S = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$8. S = \frac{6}{2} + \left(\frac{1}{12} \right)^2 + \frac{6.6}{2} \left(\frac{1}{12} \right)^3 + \frac{6.6.11}{4} \\ \left(\frac{1}{12} \right)^4 + \dots \dots \infty$$

$$2S = \frac{6.6}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} \right)^2 + \frac{6.6.6}{2} \left(\frac{1}{12} \right)^3 \\ + \frac{6.6.6.11}{4} \left(\frac{1}{12} \right)^4 + \dots \dots \infty$$

இரண்டு பக்கங்களிலும் $1 + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)$ இக் கூட்ட

$$\begin{aligned} 2.S + \left[1 + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \right] &= 1 + \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \\ &+ \frac{2.2}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{2.2.2}{1} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \dots = \infty \\ &= (1-x)^{-2} \text{ ஆகும்,} \end{aligned}$$

$$p = 2; q = 2; \frac{x}{q} = \frac{1}{12} \quad \therefore x = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \therefore 2.S + \left[1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{12} \right] &= \left(1 - \frac{1}{4} \right)^{-2} \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^{-2} = \left(\frac{4}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

$$2.S + \left[1 + \frac{1}{6} \right] = \left(\frac{4}{3} \right)^2$$

$$2S = \left(\frac{4}{3} \right)^2 - \frac{7}{6}$$

$$S = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{16}{9} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{7}{6} \right].$$

பக்கேறு எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$\frac{x^2}{(x-1)(2x-1)}$ இ x -ன் படிகள் ஏது வரிசையில் வகுமறு விரித்தெழுதுக. ஆர்விரிவில் x^2 -ன் குகழு காண்க. x -ன் எம் மதிப்புகளுக்கு இவ்விரிவு உண்ணவாரும் எனக் காண்க.

$\frac{x^2}{(x-1)(2x-1)}$ ஒரு தகாய் பின்னம். மேலே உண்ணகோவை வும் கீழே உண்ண கோவைவும் சமபடி உண்ணவாக இருப்பதால் முதலில் தகாய் x^2 இ, $(x-1)(2x-1)$ ஆல் வகுக்க மேலும்.

$$\therefore \frac{x^2}{(x-1)(2x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(2x-1)}.$$

இப்பொழுது $\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(2x-1)}$ என்பது ஒரு தகு சின்னமாகும். அதைப் பகுதிச் சின்னங்களாகப் பிரிப்போம்.

$$\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(2x-1)} \text{ என்க.}$$

$$x = 1 \text{ என்ற நிமிஷத்துக்கு : } A = 1.$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2}{(x-1)(2x-1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(x-1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(2x-1)} \\ &= \frac{1}{2} - (1-x)^{-1} + \frac{1}{2}(1-2x)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} - [1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \infty] + \frac{1}{2}[1 + (2x) \\ &\quad + (2x)^2 + \dots \infty (2x)^n + \dots \infty] \end{aligned}$$

$$\therefore x^n \text{-ன் கெழு} = -1 + \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1} - 1$$

சுருதுப்புத் தேற்றக் கட்டுப்பாட்டின்படி $|x| < 1$; $|2x| < 1$ அதாவது $|x| < \frac{1}{2}$ என்ற மதிப்புக்கு இவ்விதம் உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக

$$\begin{aligned} n &= \frac{n(n^2-1^2)}{1+2} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2+3} + \dots \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^r(n^2-1^2) \dots (n^2-r^2)}{r+1} + \dots \dots = (-1)^{n+1} \text{ என்ற } \end{aligned}$$

திருவுக.

$$\begin{aligned} (1-x)^n &= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3} x^3 \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + (-1)^{n-1} n x^{n-1} \\ &\quad \quad \quad + (-1)^n x^n \dots \dots (A) \end{aligned}$$

$|x| < 1$ ஆனால்,

$$(1-x)^{-(n+1)} = 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^2 + \dots \dots (B)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ளதை

$$S = n - \frac{n(n^2-1^2)}{1 \cdot 2} + n \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2 \cdot 3} \dots \dots$$

கொண்டால்

$(-1)^{n-1} S = (A)$, (B)-ன் பெருக்கத் தொலை விரிவில் x^{n-1} -ன் கெழுவாகும்.

$\therefore (-1)^{n-1} S = (1-x)^n \times (1-x)^{-(n+1)}$ -ன் விரிவில் x^{n-1} -ன் கெழுவாகும்.

$= (1-x)^{-1}$ -ன் விரிவில் x^{n-1} -ன் கெழு.

$$= 1.$$

$$\therefore S = \frac{1}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n+1}$$

$$\therefore n - \frac{n(n^2-1^2)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2 \cdot 3} + \dots \dots + \frac{(-1)^r (n^2-1^2) \dots (n^2-r^2)}{r \cdot (r+1)} \dots \dots = (-1)^{n+1}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$\frac{x}{(1+2x)^3(1-3x)}$ -ன் படிக்கச் சது வரிசையில் வருமாறு விரித்தெழுதுக. இவ்விரிவில் x^2 -ன் கெழு காண்க. x -ன் எம் மதிப்புகளுக்கு இவ்விரிவு உண்மையாகும்?

$\frac{x}{(1+2x)^3(1-3x)} = \frac{A}{(1+2x)} + \frac{B}{(1+2x)^2} + \frac{C}{1-3x}$
எனப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்தால்,

$$A = \frac{2}{25}, B = -\frac{1}{5}, C = \frac{8}{25}$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad \frac{x}{(1+2x)^2(1-3x)} &= \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{(1+2x)} \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+2x)^2} + \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{2}{25} (1+2x)^{-2} + \frac{1}{5} (1+2x)^{-2} + \frac{3}{25} (1-3x)^{-1} \\
 &= \frac{2}{25} [1-2x + (2x)^2 - \dots + (-1)^n (2x)^n \\
 &\quad + \dots \dots \infty] \\
 &= \frac{1}{5} [1-2(2x) + 3(2x)^2 + \dots \\
 &\quad \dots + (n+1)(-1)^n (2x)^n + \dots \dots \infty] \\
 &+ \frac{3}{25} [1 + 3x + (3x)^2 + \dots + (3x)^n + \dots \dots \infty] \\
 x^n \text{ ன் கெழு } &= \frac{2}{25} (-1)^n 2^n + \frac{1}{5} (n+1)(-1)^n (2)^n \\
 &+ \frac{3}{25} 3^n. \text{ சுருதுப்புத் தேற்றத்தின் கட்டுப்பாட்டின்படி, }
 \end{aligned}$$

$$|2x| < 1; \quad |3x| < 1 \text{ ஆதலால் } |x| < \frac{1}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\frac{(1-3x)^r}{1-x}$ என்ற விரிவில் முதல் $(n+r)$ உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை $(-1)^n (2r-n)2^{n-1}$ என திறவுக.

$f(x)$ என்ற விரிவில் $(n+r)$ உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{f(x)}{1-x} \text{ என்ற விரிவில் } x^{n+r-1} \text{ ன் கெழுக்காகும்.}$$

$$= \frac{(1-3x)^r}{(1-x)^2} \text{ ன் விரிவில் } x^{n+r-1} \text{ ன் கெழு.}$$

$$\begin{aligned}
 (1-3x)^r &= (1-x-2x)^r = (1-x)^r + {}^rC_1 (1-x)^{r-1} (-2x) \\
 &\quad \dots \dots + {}^rC_1 (1-x) (-2x)^{r-1} + (-2x)^r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad \frac{(1-3x)^r}{(1-x)^2} &= (1-x)^{r-2} + \dots + {}^rC_1 (1-x) (-2x)^{r-2} \\
 &\quad + {}^rC_1 \frac{(1-2)^{r-1}}{1-x} x^{r-1} + \frac{(-2)^r x^r}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

x^{n+r-1} -ன் கெழு கடைசி இரண்டு உறுப்புகளில்தான் உள்ளது.

$$\begin{aligned}\therefore x^{n+r-1}\text{-ன் கெழு} &= n(-2)^{n-1} + (-1)^n 2^n r \\ &= (-1)^n 2^{n-1} [2r - n]\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$\frac{x+1}{(x-1)^3(2x+3)}$ இ x -ன் படிக்கள் ஏழு வரிசையில் வருமாறு விரித்தெழுதி, அபிச்சிதில் x^n -ன் கெழுவைக் காண்க. x -ன் எம் மதிப்புக்கு இயல்பு உண்மையாகும்?

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(2x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(2x+3)} \quad \text{ஆகும்}$$

$$x+1 = A(x-1)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-1)^3$$

$$\text{பின்ன கடைசியை } A = \frac{1}{26}, B = \frac{2}{6}, C = -\frac{11}{26}$$

$$\therefore \frac{(x+1)}{(x-1)^3(2x+3)} = \frac{1}{26} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{6} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2}{26} + \frac{1}{(2x+3)}$$

$$= -\frac{1}{26} [(1-x)^{-1}] + \frac{2}{6} [(1-x)^{-3}] - \frac{2}{76} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{26} (1+x+x^2+\dots) + \frac{1}{6} (1+2x+2x^2+\dots)$$

$$= -\frac{2}{76} \left[1 + \left(-\frac{2}{3}x\right) + \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + \dots + \left(-\frac{2}{3}x\right)^n + \dots \right]$$

$$x^n\text{-ன் கெழு} = -\frac{1}{26} + \frac{2}{6}(n+1) - \frac{2}{76} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

எருறுப்புத் தேற்றக் கட்டுப்பாட்டின்படி,

$$|x| < 1; \quad |x| < \frac{3}{2}.$$

அதாவது $|x| < 1$ மதிப்புக்கு உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$\frac{1}{1-x-6x^2}$ இப் பகுதியில் பின்னக்காரணம் பிழித்து,

$$1 + (n-1)6 + \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot 6^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3} 6^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ 6^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1} \right\} \text{ எனக் காண்பி.}$$

$$\frac{1}{1-x-6x^2} = \frac{1}{(1-3x)(1+2x)}$$

$$\therefore \frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{(1-3x)} + \frac{B}{(1+2x)}$$

$$x = \frac{1}{3} \text{ என்று பிரதியிடுக, } A = \frac{2}{5}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad B = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore \frac{1}{1-x-6x^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{(1-3x)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+2x)}$$

$$= \frac{2}{5} (1-3x)^{-1} + \frac{1}{5} (1+2x)^{-1}$$

$$= \frac{2}{5} [1 + (3x) + (3x)^2 + \dots + (3x)^n + \dots]$$

$$+ \frac{1}{5} [1 - 2x + (2x)^2 + \dots + \dots (-2x)^n + \dots]$$

$$x^n\text{-ன் கெழு} = \frac{2}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} (-2)^n$$

$$= \frac{1}{5} \{ 3^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1} \} \dots \dots (A)$$

$$\frac{1}{1-x-6x^2} = [1-x(1+6x)]^{-1}$$

$$= 1 + x(1+6x) + x^2(1+6x)^2 + \dots \dots + x^n(1+6x)^n + \dots \dots$$

$x^n(1+6x)$ என்ற உறுப்பிற்குப் பின்பு x^n -ன் கெழு இவ்வாறு,

$$\therefore x^n (1+0x)^{n-0} \text{-ல் } x^n \text{-ன் கெழு} = 1.$$

$$x^{n-1} (1+0x)^{n-1} \text{-ல் } x^{n-1} \text{-ன் கெழு} = \frac{n-1}{1} \cdot 0.$$

$$x^{n-2} (1+0x)^{n-2} \text{-ல் } x^{n-2} \text{-ன் கெழு} = \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot 0^2$$

$$\therefore \frac{1}{1-x-0x^2} \text{-ல் } x^n \text{-ன் கெழு} = 1 + \frac{(n-1)}{1} \cdot 0 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} \cdot 0^2 + \dots \quad (3)$$

A, B-இற்குத்த

$$1 + (n-1)0 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} 0^2 + \dots = \frac{1}{0} [0^{n+1} + (-1)^n 0^{n+1}]$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$\frac{x^2-7x+2}{(3-2x)(1+x)^2} = \frac{A}{3-2x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$ என்று
பகுதிப் பிரிவுகளாகாகப் பிரித்து, x^2 -ன் கெழுவைக் காண்க. x -ன்
எய்திப்புகு இருவிரிவு உள்ளவையாகும்?

$$\frac{x^2-7x+2}{(3-2x)(1+x)^2} = \frac{A}{(3-2x)} + \frac{B}{(1+x)} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

$$\therefore x^2-7x+2 = A(1+x)^2 + B(1+x)(3-2x) + C(3-2x)$$

இதன் தீர்வு $A = -1$, $B = -1$, $C = 2$.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2-7x+2}{(3-2x)(1+x)^2} &= \frac{-1}{3-2x} - \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{2} \right)^{-1} - (1+x)^{-1} + 2(1+x)^{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{2x}{2} + \left(\frac{2x}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2x}{2} \right)^n + \dots \right] \\ &\quad - [1-x+x^2-\dots = (-x)^0 + \dots] \\ &\quad + 2[1-2x+3x^2-\dots = (n+1)(-x)^0 + \dots] \end{aligned}$$

$$\therefore x^n\text{-ன் கெழு} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{2^n} = (-1)^n + 2(-1)^n(n+1).$$

பொதுவழி தேற்றத்தின் கூட்டும் கூட்டிக் கெழு $\left| \frac{2}{2} x \right| < 1$, $|x| < 1$

$\therefore |x| < 1$ என்ற மதிப்புக்கு உண்மையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

n ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாகில், $(-1)^n = 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$
 $+ \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots \dots (n+1)$ உறுப்புகள் என
 தருக. (n கூட்டு முழு எண்)

$$|x| < 1 \text{ ஆனால் } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + x^n \text{ (n கூட்டு முழு எண்).}$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^{n-1} \cdot (1+x) \\ + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \dots \dots (B)$$

$\therefore (1+x)^n (1+x)^{n+1} = \frac{1}{1+x} = (A) (B)$ -ன் பெருக்குத்
 தருக.

இரு பக்கங்களிலும் x^n -ன் கெழுதவச் சமன் செய்தால்,

$$(-1)^n = x^n\text{-ன் கெழு} \left(\frac{1}{1+x} \right) \text{ இலிருந்து } = (1+x)^{-1}\text{-ன்} \\ x^n\text{-ன் கெழு} \\ = \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + x^n \right] \left[1 - (n+1)x \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} x^2 \dots \dots \right] \\ = 1 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \\ \dots \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்.}$$

பயிற்சி 2 (அ)

1. a, b ஆகியவைகள் மூன்றாவே $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$ -ன் r -ஆவது உறுப்புகளாகும் $b = (2r-1)a$ என்று காட்டு.
2. x கூட்டு மதிப்புடையதாகில், $(1-2x)^{\frac{1}{2}}$ -ல் முதல் மூன்ற மதிப்புகள் உறுப்புகள் காட்டுக.
3. x கூட்டு மதிப்புடையதாகில், எந்த உறுப்பிலிருந்து, $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ -ன் விரிவில் ஒரே குறியைப் பெற்றிருக்கும்?
4. x கூட்டு மதிப்புடையதாகில் $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ என்ற விரிவில் எந்த உறுப்பிலிருந்து கூட்டுக் குறியைப் பெற்றிருக்கும்?
5. x கூட்டு மதிப்புடையதாகில், $\frac{11-18x}{(1-x)^2}$ என்ற விரிவில் முதல் மூன்ற மதிப்புகள் உறுப்பு எது?
6. $\frac{19-21x}{(1-x)^3}$ என்ற விரிவில் முதல் 19 உறுப்புகள் கூட்டுக் குறியைப் பெற்றிருக்கும் என்று காட்டுக.
7. $x = \frac{2}{3}$ எனில் $(1+x)^{-3}$ என்ற விரிவில் மட்டளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பு எது?
8. $x = \frac{3}{10}$ ஆனால் $(1-2x)^{-2}$ என்ற விரிவில் மட்டளவில் மிகப் பெரிய உறுப்பு எது?

இவ்வரும் தொடர்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க :

9. $1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1.4}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1.4.7}{24} - \frac{1}{5^2} + \dots$ என
10. $1 + \frac{5}{8} + \frac{5.8}{8.12} + \frac{5.8.11}{8.12.16} + \dots$ என
11. $\frac{2}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \dots$ என

$$12. \quad \frac{4}{2.4} + \frac{4.5}{2.4.5} + \frac{4.5.6}{2.4.5.6} + \dots \dots \infty$$

$$13. \quad \frac{1}{2.4.5} + \frac{1.3}{2.4.5.6} + \frac{1.3.5}{2.4.5.6.10} + \dots \dots \infty$$

$$14. \quad 1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.5} + \frac{3.5.7}{4.5.12} + \dots \dots \infty$$

$$15. \quad \frac{1}{5} + \frac{1.4}{5.12} + \frac{1.4.7}{5.12.18} + \dots \dots \infty$$

$$16. \quad \frac{1}{5} + \frac{1.3}{5.8} + \frac{1.3.5}{5.8.9} + \dots \dots \infty$$

$$17. \quad 1 + 2. \frac{1}{2^2} + \frac{2.5}{1.2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{2.5.8}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \dots \infty$$

$$18. \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.5} - \frac{1.3.5}{4.5.12} + \dots \dots \infty$$

$$19. \quad 1 - \frac{1}{5} + \frac{1.3}{5.12} - \frac{1.3.5}{5.12.18} + \dots \dots \infty$$

$$20. \quad \frac{3.5}{3.5} + \frac{3.5.7}{3.5.9} + \frac{3.5.7.9}{3.5.9.12} + \dots \dots \infty$$

$$21. \quad \frac{5}{5.8} + \frac{5.7}{5.8.9} + \frac{5.7.9}{5.8.9.12} + \dots \dots \infty$$

$$22. \quad \frac{1}{4} + \frac{1.5}{4.5} + \frac{1.5.7}{4.5.12} + \frac{1.5.7.9}{4.5.12.18} + \dots \dots \infty$$

$$23. \quad \frac{1}{5} + \frac{5}{5.12} + \frac{5.9}{5.12.18} + \frac{5.9.11}{5.12.18.24}$$

$$+ \dots \dots \infty$$

$$24. \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1.3}{5.6.9} + \frac{1.3.5}{5.6.9.12} + \dots \dots \infty$$

பயிற்சி 2 (b)

கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவுகளில் x^5 -ன் கெழுவைக் காண்க.

$$(1) \quad \frac{x+4}{x^3+6x+8}$$

$$(2) \quad \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

$$(3) \quad \frac{1-x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$$

$$(4) \quad \frac{x^2+8}{(x+1)^2(x+3)(x+5)}$$

$$(5) \quad \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$$

$$(6) \quad \frac{x^2+2}{(x-2)(x-5)}$$

$$(7) \quad \frac{x+4}{x^2+6x+8}$$

$$(8) \quad \frac{x+8}{(x+2)(x-1)^2}$$

(9) $\frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{(2+3x)^2} = 1 + x + \dots$ என்க. a, b -ன் மதிப்பு என்ன? x^5 -ன் கெழுவைக் காண்க.

(10) $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(a+bx)^2} = 2 + 3x + \dots$ என்க. a, b -ன் மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 2 (c)

x மிகச் சிறியதாக இருப்பின், கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தேர்வை மதிப்புகளைச் சரி பார்க :

$$1. \quad \frac{(2+2x)^{\frac{1}{2}}(3+4x)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = 0 + \frac{74}{5}x + \dots \text{ தேர்வமற்ற.}$$

$$2. \quad \frac{(1-x)^{-\frac{3}{2}} - (1+x)^{\frac{3}{2}}}{2+3x} = \frac{x^2}{4} + \dots \text{ தேர்வமற்ற.}$$

$$3. \quad \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} + (1-4x)^{-\frac{3}{2}}}{(1-2x)^{-\frac{1}{2}} + (1-4x)^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{8}{3}x + 4x^2 + \dots$$

தேர்வமற்ற.

$$4. \quad \frac{a \cdot x^b - b \cdot x^a}{x^b - x^a} = \frac{1}{1-x} \text{ தேர்வமற்ற.}$$

$$6. (N^2 + a)^{\frac{1}{2}} = N \frac{5N^2 + 3a}{5N^2 + 2a} \text{ தேர்வுமுறை.}$$

$$8. (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2n + (n+1)x}{2n + (n-1)x} \text{ தேர்வுமுறை.}$$

$$7. \left[\frac{1-x}{1+n+x^2} \right]^n = 1 - 2nx + n(2n-1)x^2$$

$$8. \frac{(1+x+x^2)(1+x)^2}{1-x+x^2} = 1 + 4n + 7x^2 + 6x^3.$$

$$9. \frac{\sqrt{1+2x+2x^2}}{1-2x} = 1 + 4x + \frac{25}{2} x^2.$$

$$10. \sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+9} = \frac{7}{2x} \text{ தேர்வுமுறை.}$$

பயிற்சி 2 (d)

$$1. (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum a_r x^r \text{ என்க.}$$

$$a_0 a_0 + a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \dots + a_2 a_n = 1.$$

$$2. |x| < 2 \text{ க்கு } \frac{(1-2x)(1-3x)}{(x-2)(x-3)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$+ \dots \infty \text{ ஆகும்.}$$

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots = 1 \text{ எனத் தீர்வு.}$$

$$3. 2^n = \binom{n-1}{1} 2^{n-1} + \binom{n-2}{2} 2^{n-2} + \dots = (n+1)$$

எனத் தீர்வு.

$$4. (n+1) 2^n = n \binom{n-1}{1} 2^{n-1} + (n-1) \binom{n-2}{2} 2^{n-2}$$

$$\dots = \frac{1}{8} (n+1)(n+2)(n+3) \text{ எனத் தீர்வு.}$$

$$5. (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum a_r x^r \text{ என்க.}$$

$$a_n 2^n + a_{n-1} \binom{n-1}{1} 2^{n-1} + a_{n-2} \binom{n-2}{2} 2^{n-2} + \dots$$

$$\dots = 1 \text{ எனத் தீர்வு.}$$

6. $(1-x)^{-2} = 1, 2, 3, \dots$ ஆகும்

$$a_1, 2^2 - a_{n-1} \left(\frac{n-1}{1} \right) 2^{n-2} + a_{n-2} \left(\frac{n-2}{2} \right) 2^{n-3} \dots$$

$$\dots = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ என நிறுவுக.}$$

7. $1 - \binom{2n}{1} + \binom{2n-1}{2} - \binom{2n-2}{3} \dots = (-1)^n$
என நிறுவுக.

8. $1 - \frac{n(n+2)}{1} + \frac{n(n-1)(n+2)(n+3)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
 $- \frac{n(n-1)(n-2)(n+2)(n+3)(n+4)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$
 $+ \dots (n+1)$ உறுப்புகள் $= (-1)^n (n+1)$
என நிறுவுக.

9. $1 - \frac{n^2-1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \dots$
 $\dots n$ உறுப்புகள் $= (-1)^n n$ என நிறுவுக.

10. $(n+1)+n^2 + \frac{n(n^2-1^2)}{2} + \frac{n(n+1)(n^2-2^2)}{8} + \dots$
 $\dots (n+1)$ உறுப்புகள் $= \frac{(n+2)(n+3) - (2n+1)}{\frac{n}{2}}$
என நிறுவுக.

11. $1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$
 $+ \dots = 0$ ஆகும்.

12. $f(n) = 1 + \frac{n}{1} + \frac{1}{2} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2^2} + \dots n$

உறுப்புகள் ஆகும் $f(n) = 2f(n-1)$; $f(n) = 2^{n-1}$ என நிறுவுக.

பயித்தி 2 (e)

1. $\frac{(1-3x)^n}{1-x}$ -எதத விசினித் துதம் $(n+r)$ கெருக்கினித் கூட்டுத்தெரகை $2^{n-1} (2r-n)$ எதது கான்கி.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} x^n$ எதத விசினித் துதம் n உறுப்பு கனினித் கெருக்கனினித் கூட்டுத்தெரகை கான்க.

$$3. \quad 1+n+\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}+\dots\dots$$

$$n \text{ உறுப்புக்கள் } = \frac{1}{1} \frac{2n-1}{n-1} \text{ எனக் கான்க.}$$

$$4. \quad \frac{(1+x)^n}{1-x} \text{ -ல் துதம் } (n+r) \text{ கெருக்கனினித் கூட்டுத்தெரகை} \\ = 2^n (2r+n) \text{ எனக் கான்க.}$$

$$5. \quad \frac{(1+x)^n}{(1-x)^2} \text{ -ல் துதம் } (n+r) \text{ கெருக்கனினித் கூட்டுத்தெரகை} \\ = 2^{n-1} \{ n^2+n(4r+3)+4r(r+1) \}$$

$$6. \quad \frac{1}{1-2x-3x^2} \text{ -ல் துதம் } n \text{ கெருக்கனினித் கூட்டுத்தெரகை} \\ = \frac{1}{2} \{ 3^{n+1}+(-1)^{n-1}-2 \} .$$

3. படிக்குறித் தேற்றம்

3.1. e என்னும் எண்

தாம் எக்ஸ் $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ என்பது ஒரு திட்டமான எண் என்பதை III ஆம் பகுதியில் காண்போம். இத்திட்டமான எண்ணை ' e ' என்று இனிக் குறிப்பிடுவோம். இவ்வெண்ணைப் 'படிக்குறி எண்' என்று கூறுவார்கள்.

3.2. படிக்குறி எக்ஸ்

" x " என்பது எந்த ஒரு மெய்யாவிலும்,

$$x \rightarrow e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x. \quad \dots \quad (அ)$$

என்று $x, +\infty$ ஐ மெய்யெண்கள் வழி நெருங்குகின்றது.

3.3. படிக்குறித் தேற்றம்

" x "-ன் எல்லா உண்மை மதிப்புகளுக்கும்

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (ஆ)$$

3.2. (அ), 3.3 (ஆ) - இவற்றின் மெய்ப்பாடுகள் பின்னர் III ஆம் பகுதியில் தரப்படும். இவைகளை e^x -ன் இலக்கணமாகக் கொண்டு ' e '-ன் பண்புகளைப் பற்றியும், சில தொடர்புகளின் தொகைகளையும் காண்போம்.

3.4. e , 2க்கும், 3க்கும் இடைப்பட்டிருக்கிறது

$$e = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\therefore e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad \dots \quad \dots$$

$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$ என்னும் தொகை ஒரு தேர் மெய்யெண்ணாகும். எனவே, $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots + \dots + \dots$ என்னும் தொகை $1 + \frac{1}{1!}$ என்னும் தொகையை விடப் பெரிதாகும்.

அதாவது, $e > 1 + \frac{1}{1!} = 2$.

எனவே, e இரண்டை விடப் பெரியதாகும்.

இனி e மூன்றைவிடச் சிறியது என்று மெய்ப்படுத்தோம்.

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

$$\text{எனவே, } \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \dots$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$= 2 + \frac{1}{1-1/2}$$

$$= 3$$

அதாவது $e < 3$.

எனவே e இரண்டிற்கும், மூன்றிற்கும் இடைப்பட்ட எண்ணாகும்.

3.5. e ஒரு விகிதமுறு எண்

இயலுமானால் e ஐ $\frac{p}{q}$ என்று விகிதப்படுத்தி எழுதுவோம். கண்டு p -ம், q -ம் முற்றெண்கள். குறிப்பாக p -ம் q -ம் ஒன்றித் கொண்டு பதா எண்களாகும்.

$$\therefore \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots =$$

இரண்டு புறமும் $q!$ ஆக பெருக்க, தமக்குக் கிடைப்பது

$$p \cdot (q-1)! = h+k$$

$$\text{என்க } h=q! \left\{ \sum_{n=0}^q -\frac{1}{n!} \right\} \text{ \& } k=q! \left\{ \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \right\}$$

k என்பது ஒரு ஒற்றெண் என்பது எளிதில் புலப்படும்.

$$\begin{aligned} \text{ஆனால் } k &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \\ &\quad \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \dots \dots \\ &< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots \dots \dots \\ &\quad [\because q \text{ ஒரு தேர் முழு எண்}] \\ &= \frac{1}{q+1} + \left(1 - \frac{1}{q+1} \right) = \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

மேலும் $k > \frac{1}{q+1}$ என்பதைக் கவனிக்க.

எனவே $\frac{1}{q+1} < k < \frac{1}{q}$, $\frac{1}{q+1}$ க்கும், $\frac{1}{q}$ க்கும் இடைப்பட்ட எண்கள் சரியான விசிதமுறு எண்களாகவும், விசிதமுறு எண்களாகவும் இருக்கலாம். எனவே k ஒரு விசிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விசிதமுறு எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

k ஒரு விசிதமுறு எண்ணாக இருப்பின் தமது மெய்ப்பாடு முடிவுற்றது.

k ஒரு சரியான விசிதமுறு எண்ணாக இருப்பின் k ஒரு தேர் முழு எண். ஆதலால் தமக்குக் கிடைப்பது,

ஒரு தேர் முழு எண் = தேர் முழு எண் + சரியான விசிதமுறு எண், ஆகவே பொருத்தா முடிவு. எனவே $r-2 \frac{p}{q}$ என விசிதப்படுத்தி எழுத முடியும் என்ற கொள்கை தவறானதாதும். இம்முடிவினால் 'e' ஒரு விசிதமுறு எண் என்பது விளங்குகிறது.

அதாவது r ஐ $\frac{p}{q}$ என விசிதப்படுத்தி எழுத முடியும் என்ற கொள்கை தவறானதாதும். இம் முடிவினால் 'e' ஒரு விசிதமுறு எண் என்பது விளங்குகிறது.

குறிப்பு: 'e'-ன் தொடராய் மதிப்பு 2.7183. இம்மதிப்பு நான்கு தசமத்தானத்திற்குச் சரியானதாகும்.

3-6. சில இன்றியமையாத வாய்பாடுகள்

$$(i) \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$(ii) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$(iii) \quad \frac{e + \frac{1}{e}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots \dots \dots \infty$$

$$(iv) \quad \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots \dots \dots \infty$$

3-7. $a > 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் e^a -ன் விரிவை

$$e^a = e^{x \log a} \text{ என்று எழுதுவதைக் கவனிக்க.}$$

$$\text{எனவே } e^a = 1 + (x \log a) + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \log a)^n}{n!} + \dots$$

3-71. a, x -இவற்றின் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும்,

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{6} + \dots \dots \dots \infty$$

எனக் கிடைக்கும்.

3-8. தொடர்களின் தொகை காணல் :

நாம் மேலே கண்ட வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்திச் சில வகைத் தொடர்களின் தொகைகளை இப்பகுதியில் கண்டுபிடிப்போம். சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் தொகை காணும் வழியை விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{2}{8!} + \frac{4}{6!} + \frac{8}{7!} + \dots = e^{-1} \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$S = \frac{2}{8!} + \frac{4}{6!} + \frac{8}{7!} + \dots \text{ என்று குறிப்பிடுக.}$$

இத்தொடரின் n -ஆவது உறுப்பின் I_n என்று குறிக்க.

$$\text{எனவே } I_n = \frac{2n}{(2n+1)!} = \frac{2n+1-1}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n!} - \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\text{எனவே } I_1 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$I_2 = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$$

இவைகளைக் கூட்டுவதோடு தவக்குக் கிடைப்பது

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots \right) \\ &= \left\{ \frac{e+e^{-1}}{2} - 1 \right\} - \left\{ \frac{e-e^{-1}}{2} - 1 \right\} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)!} = \frac{e}{2} + \frac{2}{e} \text{ என்று காட்டுக.}$$

இடக் கைப்புதல்

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)!}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)!}$$

எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned} \text{இத் தொடரின் } n\text{-ஆவது உறுப்பு} &= \frac{2n+1}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1(2n+1)-1}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2n!} - \frac{1}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\text{எனவே முதலாவது} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$\text{இரண்டாவது} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$$

$$\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

இவைகளைக் கூட்டி, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} S &= \frac{e}{2} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots \right) = \frac{e}{2} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{5!} + \dots \right) \\ &= \frac{e}{2} \left(\frac{e + e^{-1}}{2} - 1 \right) = \frac{e}{2} \left(\frac{e - e^{-1}}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6n+1}{(2n+1)!} &= 1 + \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - 1 \\ &= \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = \text{வ. கை. ப.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{aligned} (x+1)^e &= \frac{1}{1!} + \frac{1+e}{2!}x + \frac{1+e+e}{3!}x^2 \\ &\quad + \frac{1+e+e+7}{4!}x^3 + \dots \dots \infty \end{aligned}$$

எனக் காண்க.

எனக் கையெழுத்தித் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$\begin{aligned} &= \frac{1+e+e+7+\dots n \text{ உறுப்புகள்}}{n!} x^{n-1} \\ &= \frac{\frac{n}{2}(2+n-1)}{n!} x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2}{n!} x^{n-1} \\
&= \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \frac{(n-1) + 1}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

$$\text{எனவே, மூன்றாம்படி} = 0 + 1$$

$$2\text{ஆம் உறுப்பு} = x + \frac{x}{1!}$$

$$3\text{ஆம் உறுப்பு} = \frac{x^2}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$4\text{ஆம் உறுப்பு} = \frac{x^3}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

இவைகளைக் கூட்டி நமக்குத் தேவையான

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1!} + \frac{1+2}{2!} x + \frac{1+2+2}{3!} x^2 + \dots \infty \\
&= \left(x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \\
&= x \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \\
&= xe^x + e^x \\
&= (x+1) e^x = \text{இ. கை. ப.}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\begin{aligned} & \frac{1^2}{1!} + \frac{1^2 + 2^2}{2!} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3!} + \dots \infty \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 2^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!} + \dots \infty \right) \end{aligned}$$

என்று காட்டுக. இரண்டும் $\frac{27}{4}$ உகந்த சமம் என்பதை மெய்யிடுக.

$$\begin{aligned} & \frac{1^2}{1!} + \frac{1^2 + 2^2}{2!} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3!} \\ &+ \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (n+1)^2}{4 n!} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!} + \dots \infty \right) \end{aligned}$$

$$\text{இதில் } \frac{1^2}{1!} + \frac{1^2 + 2^2}{2!} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3!} + \dots \infty = S \text{ என்க.}$$

$$\therefore S = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (n+1)^2}{n!} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^2}{(n-1)!}$$

$$n(n+1)^2 = a(n-1)(n-2)(n-3) + b(n-1)(n-2) + c(n-1) + d.$$

$n=1$ என்று வைப்பின்

$$4 = d.$$

$n=2$ என்று வைப்பின்

$$24 = c + d.$$

$$\therefore c = 20$$

$n=3$ என்று வைப்பின்

$$48 = 8b + 2c + d$$

$$\therefore b = 2$$

n^4 -ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டுப்பார்க்குமிடத்தான்

$$a = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } n(n+1)^3 &= (n-1)(n-2)(n-3) \\ &\quad + 2(n-1)(n-2) + 20(n-1) + 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^3}{(n-1)!} &\text{-ன் } n \text{ ஆவது உறுப்பு} = \frac{n(n+1)^3}{(n-1)!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3) + 2(n-1)(n-2) + 20(n-1) + 4}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n-4)!} + \frac{2}{(n-3)!} + \frac{20}{(n-2)!} + \frac{4}{(n-1)!}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^3}{(n-1)!} &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} \\ &\quad + 20 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$= e + 2e + 20e + 4e$$

$$= 27e.$$

$$\therefore S = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)^3}{(n-1)!} = \frac{27e}{4}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!} \text{-ன் தொகை காண்க.}$$

தெரிநின் n ஆவது உறுப்பு n^4 ஆகும்.

$$n^4 = a n(n-1)(n-2)(n-3) + b n(n-1)(n-2) + c n(n-1) + d n + e' \text{ என்று எழுதுக.}$$

$n = 0$ என்ற வகைதான்

$$e' = 0$$

$n = 1$,,

$$d = 1$$

$n = 2$,,

$$2c + 2d = 16$$

$$c + d = 8$$

$$c = 7$$

$n = 3$,,

$$3b + 3c + 2d = 18$$

$$2b + 2c + d = 27$$

$$2b = 27 - 1 - 14$$

$$= 12$$

$$b = 6.$$

n^4 -ன் கொடுக்களைச் சமன்பாட்டுப் பரிகாரம்,

$$a = 1.$$

எனவே $n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n}{n!}$$

$$= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 6 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!}$$

$$+ 7 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

$$= e + 6e + 7e + e$$

$$= 15e.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(n+8)n!} = \frac{1}{8} (43-16c) \text{ என்று காட்டுக.}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$\begin{aligned} &= \frac{(2n-1)}{(n+8)n!} \\ &= \frac{(2n-1)(n+8)(n+1)}{(n+8)!} \end{aligned}$$

$$(2n-1)(n+8)(n+1) = a(n+8)(n+8)(n+1) + b(n+8)(n+8) + c(n+8) + d \text{ என எடுத்துக்.}$$

$n = -8$ என்று எக்ஸு மதிப்பெற்ற

$$-7, -1, -8 = d \quad \therefore d = -14.$$

$n = -8$ என்று மதிப்பெற்ற

$$0 = c + d \quad \therefore c = 14.$$

$n = -1$ என்று மதிப்பெற்ற

$$\begin{aligned} 0 &= 2b + 2c + d \quad \therefore b = -\frac{1}{2}(28 + (-14)) \\ &= -7. \end{aligned}$$

n^2 -ன் கொடுக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்

$$a = 2.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(n+8)n!} \text{ -ன் } n \text{ ஆவது உறுப்பு}$$

$$= \frac{2}{n!} - \frac{7}{(n+1)!} + \frac{14}{(n+2)!} - \frac{14}{(n+8)!}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(n+2)n!} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
 &- 7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} + 14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \\
 &- 14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} \\
 &= 2(e-1) - 7\left(e-1 - \frac{1}{1!}\right) + 14\left(e-1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) \\
 &- 14\left(e-1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) \\
 &= -5e + \frac{49}{6} = \frac{1}{6}(49-15e).
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$\begin{aligned}
 \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} \cdot (\log 2) + \frac{5^2}{3!} (\log 2)^2 + \dots \dots = 5 \log 2 \\
 + \frac{1}{\log 2} \text{ என்று காட்டுக.}
 \end{aligned}$$

$\log 2 = x$ என்று கொள்க. எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் $\frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} x + \frac{5^2}{3!} x^2 + \dots$ என்ற வடிவம் கொள் கின்றது.

இத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$\begin{aligned}
 &= x^{n+1} \frac{(2n-1)^2}{n!} = \frac{4n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} \cdot x^{n-1} \\
 &= \left\{ \frac{4}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} \right\} x^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1^2}{1!} + \frac{2^2}{2!} x + \dots &= 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \\
 &= 4x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4x \cdot e^x + \frac{1}{x} \cdot (e^x - 1) \\
&= 4 \log 2 \cdot e^{\log 2} + \frac{1}{\log 2} \cdot e^{\log 2} - \frac{1}{\log 2} \\
&= 4 \cdot \log 2 \cdot 2 + \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log 2} \\
&= 8 \log 2 + \frac{1}{\log 2}
\end{aligned}$$

3.9. விரிவடைதல் சில முற்றொருமைகளும்

படிக்குறித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சில சாத்தியான x -ன் படிகளில் விரிக்கலாம். சீமே சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் மேற் கொள்ளும் வழிநிலைகளைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\frac{a-bx+cx^2}{e^x}$ என்ற சாத்தியான x -ன் படிகளில் விரித்து x^n -ன் கெழுவினைக் காண்க.

$$\begin{aligned}
\frac{a-bx+cx^2}{e^x} &= (a-bx+cx^2)e^{-x} \\
&= (a-bx+cx^2) \left\{ 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right\} \\
&= a \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots \right) \\
&\quad - b \left(x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} - \dots \right) \\
&\quad + c \left(x^2 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots \right)
\end{aligned}$$

எனவே x^n -ன் கெழு

$$\begin{aligned}
&= a \frac{(-1)^n}{n!} - b \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + c \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ cn^2 + (b-c)n + a \right\}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x}}$ என்ற சார்பினை x -ன் படிகளில் விரித்தால்,

$$x^n\text{-ன் கெழு} = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{n!} \dots n \text{ இரட்டைப்படடை எண்ணுயிருப்பின்} \\ 0 \dots n \text{ ஒத்தைப் படை எண்ணுயிருப்பின்} \end{cases}$$

என்று மெயிப்பாடு செய்க,

$$\frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x}} = e^{2x} + e^{-x} = 2 \left\{ 1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(2x)^{2n}}{2n!} + \dots \right\}.$$

எனவே n இரட்டைப்படடை எண்ணுயிருத்தால் மேற்கண்ட விரிவத்தில்,

$$x^n \text{ உள்ள உறுப்பு} = 2 \cdot \frac{2^n}{n!} x^n = \frac{2^{n+1}}{n!} \cdot x^n$$

ஆனால் n ஒத்தைப்படடை எண்ணுயிருத்தால்,

$$x^n \text{ உள்ள உறுப்பு} = 0. \quad x^0 \text{ ஆகும்.}$$

[\therefore விரிவத்தில் x, x^2, x^3, \dots உறுப்புகள் இல்லை.]

எனவே,

$$x^n\text{-ன் கெழு} = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{n!} \dots n \text{ இரட்டைப்படடை எண்ணுயிருப்பின்} \\ 0 \dots n \text{ ஒத்தைப்படடை எண்ணுயிருப்பின்.} \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$\frac{a + bx}{e^x}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழுவினைக் காண்க.

விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு ஒன்றாகவும், x^{1-n} உறுப்பு இல்லாமலும் இருக்குமாயின் a, b -ன் மதிப்புகளைக் கண்டறிக.

$$\frac{a + bx}{e^x} = (a + bx)e^{-x} = ae^{-x} + bxe^{-x} \\ = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} + bx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a \frac{x^n}{n!} + b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a \frac{x^n}{n!} + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

எனவே,

$n > 1$ ஆக இருக்கும்போது x^n -ன் கெழு

$$= \frac{a(-1)^n}{n!} + \frac{b(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$n = 4$ ஆக இருப்பின் x^4 -ன் கெழு

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(-1)^4}{4!} + \frac{b(-1)^3}{3!} \\
&= \frac{a}{24} - \frac{b}{6}
\end{aligned}$$

$n = 10$ ஆக இருக்கும்போது x^{10} -ன் கெழு

$$= \frac{a}{10!} - \frac{b}{9!}$$

ஆனால் x^4 -ன் கெழு 1 என்றும் x^{10} -ன் கெழு 0 என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே $1 = \frac{a}{24} - \frac{b}{6}$

$$0 = \frac{a}{10!} - \frac{b}{9!}$$

இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க, நமக்குக் கிடைப்பன

$$a = 40, b = 4.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$$\begin{aligned}
x^n = & {}^n c_1 (x+2)^n + {}^n c_2 (x+4)^n \dots (x+1) \text{ உறுப்புகள் வரை} \\
& = (-2)^n n!
\end{aligned}$$

$\frac{n^2}{n!}$ என்பது x^{n+1} -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழுவாகும்.

$$\frac{(n+2)^n}{n!} \text{ என்பது } x^{n+2} \text{-ன் " "}$$

$$\frac{(n+4)^n}{n!} \text{ என்பது } x^{n+4} \text{-ன் " "}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \frac{1}{n!} [n^n - {}^nC_1 (n+2)^n + {}^nC_2 (n+4)^n - \dots (n+1)] \\ \text{உறுப்புகள்} \end{aligned}$$

$$= \{ e^n - {}^nC_1 e^{(n+2)} + {}^nC_2 e^{(n+4)} - \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} \}$$

விதிவத்தில் x^n -ஐ கெடுவாராம்.

$$\begin{aligned} \text{அதாவது } \frac{1}{n!} [n^n - {}^nC_1 (n+2)^n + \dots] \\ = e^n [1 - {}^nC_1 e^{2x} + {}^nC_2 e^{4x} - \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்}] \text{-ஐ} \\ \text{விதிவத்தில் } x^n \text{-ஐ கெடுவாராம்.} \end{aligned}$$

$$= e^n (1 - e^{2x})^n \quad \dots$$

[சூறுப்புத் தேற்றப்படி]

$$= e^n \left\{ -\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} - \dots \right\}^n \text{-ஐ விதிவத்தில்} \\ x^n \text{-ஐ கெடுவாராம்.}$$

$$= (-2)^n x^n e^n \left\{ 1 - \frac{(2x)}{2!} + \dots \right\}^n \quad \dots$$

$$\begin{aligned} = (-2)^n x^n \left\{ 1 + nx + \frac{(nx)^2}{2!} + \dots \right\} \\ \times \left\{ 1 - \frac{2x}{2!} + \dots \right\}^n \text{-ஐ விதிவத்தில்} \\ x^n \text{-ஐ கெடுவாராம்.} \end{aligned}$$

$$= (-2)^n.$$

$$\text{எனவே } n^n - {}^nC_1 (n+2)^n + \dots = (-2)^n n!$$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^n$ ஐ இரு வழிகளில் விரித்து, கீழ்க் கொடுக்கப் பட்டிருக்க முற்றொருமையினை ஏற்படுத்துக.

$$\begin{aligned} n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{2!} (n-4)^n - \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} \\ = 2^n \cdot n! \end{aligned}$$

சூத்திரப்படி தேற்றப்படி.

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n} &= \frac{1}{2^n} \left[e^{nx} - n e^{(n-1)x} \cdot e^{-x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)x} \cdot e^{-2x} \right. \\ &\quad \left. + \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} \right] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[e^{nx} - n e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)x} \right. \\ &\quad \left. + \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} \right] = (1) \end{aligned}$$

$$e^{nx} = 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2!} + \frac{n^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{n^n x^n}{n!} + \dots$$

எனவே e^{nx} -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு $\frac{n^n}{n!}$ ஆகும்.

இதையே போலவே $-n e^{(n-1)x}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு $-\frac{n(n-2)^n}{n!}$ ஆகும்.

இதையேபோலவே $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{(n-2)x}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{(n-4)^n}{n!} \text{ ஆகும்.}$$

$(n+1)$ உறுப்புகள் வரை எழுதுக.

எனவே, (1)-ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு

$$\left[\frac{n^n}{n!} - \frac{n(n-2)^n}{n!} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{(n-4)^n}{n!} - \dots \right] \cdot \frac{1}{2^n} \quad (A)$$

ஆகும்.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \text{ என்பதை நாம் அறிவோம்.}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^n &= \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right)^n \\ &= x^n \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots \right)^n. \end{aligned}$$

எனவே, $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^n$ -ன் விரிவாக்கத்தில் x^n -ன் கெட்டு 1 ஆகும். (B)

A ஐவும் B ஐவும் தொடக்கிலும் நமக்குக் கிடைப்பது

$$\frac{1}{2^n} \left[\frac{n^n}{n!} - \frac{n(n-2)^n}{n!} + \frac{n(n-1)(n-4)^n}{1.2} \frac{n!}{n!} - \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} \right] = 1$$

$$\therefore n^n - n(n-2)^n + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-4)^n - \dots (n+1)$$

உறுப்புகள் $= n! \cdot 2^n$.

எடுத்துக்காட்டு 13:

$$\frac{(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2)}{e} = e^{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \quad \text{என்ற முற்றொருமை}$$

விரிவப் பயன்படுத்தியாவது, அத்நி வேறு வழியிலாவது

$$e^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1!)^2} + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \dots \right\} = 1 + \frac{2!}{(1!)^2} + \frac{4!}{(2!)^2} + \frac{6!}{(3!)^2} + \dots$$

என்ற முற்றொருமைவிரிவ உண்டாகுக.

$$\text{நாம் } \frac{(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2)}{e} = e^{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \cdot e^2 \text{ என்று எழுதலாம்.}$$

$$\text{எனவே, } \frac{(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2)}{e}$$

$$= e^2 \left\{ 1 + \frac{(x^2)}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \dots \right\} \times \left\{ 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots \right\}$$

வலக் கைப்புறத்தில் உள்ள இரு தொடர்களையும் பெருக்க, நமக்கு x^n -ன் சாத்தியமான உறுப்பாக,

$$e^2 \left\{ 1 + \frac{1}{(1!)^2} + \frac{2}{(2!)^2} + \frac{1}{(3!)^2} + \dots \right\}$$

என்ற தொடர் கிடைக்கின்றது. (A)

$$\text{எனவே } \left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \left[1 + \frac{(x + \frac{1}{x})^n}{1} + \frac{(x + \frac{1}{x})^n}{2} + \frac{(x + \frac{1}{x})^n}{3} + \dots \dots \right]$$

இப்போது $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ -ல் x இல்லாத ஒரேயொரு உறுப்பு உள்ளது. அது

$$\begin{aligned} (n+1)\text{-ஆவது உறுப்பு} &= T_{n+1} = {}^{2n}C_n x^{2n-n} \frac{1}{x^n} \\ &= {}^{2n}C_n = \frac{|2n|}{|n| \cdot |2n-n|} \\ &= \frac{|2n|}{(|n|)^2} \end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ என்ற மதிப்புகளைக் கொடுத்தால்,

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2, \left(x + \frac{1}{x}\right)^4, \left(x + \frac{1}{x}\right)^6, \dots$ என்ற விரிவுகளில் x இல்லாத உறுப்புகள் மூன்றாவது

$$\frac{2}{(1)^2}, \frac{4}{(2)^2}, \frac{6}{(3)^2}, \dots \dots \dots$$

எனவே, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ என்ற விரிவில் x^0 இல்லாத உறுப்பு,

$$\left[1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{|2|}{(1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{|4|}{(2)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{|6|}{(3)^2} + \dots \dots \right]$$

$\therefore (A), (B)$ -இயற்றியிருந்து,

$$\begin{aligned} &e^x \left\{ 1 + \frac{1}{(1)^2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(3)^2} + \dots \right\} \\ &= 1 + \frac{|2|}{(1)^2} + \frac{|4|}{(2)^2} + \frac{|6|}{(3)^2} + \dots \dots \end{aligned}$$

பயிற்சி 3.

கீழ்க்கண்டவற்றில் தொடர்ச்சிகள் கூட்டுத் தொடர்கள் காண்க.

$$1. \quad 1 + \frac{2x}{1} + \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \dots$$

$$2. \quad 1.2 + \frac{2.3}{1}x + \frac{3.4}{2}x^2 + \dots$$

$$3. \quad 2.4 + \frac{2.5}{1}x + \frac{4.6}{2}x^2 + \dots$$

$$4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n+2) \cdot n} \cdot x^n$$

$$5. \quad 1 + \frac{2^2}{1}x + \frac{3^2}{2}x^2 + \frac{4^2}{3}x^3 + \dots$$

$$6. \quad x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$7. \quad 1.2 - \frac{2.5}{1}x + \frac{3.7}{2}x^2 - \dots$$

$$8. \quad 1.2 + 2.3x + 3.4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4.5 \cdot \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$9. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n} x^n$$

$$10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{n} x^n$$

$$11. \quad \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots$$

$$12. \quad 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \dots$$

$$13. \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{4}} + \dots \dots$$

$$14. \quad \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{3}} + \dots \dots$$

$$15. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{\sqrt{n}}$$

$$16. \quad \frac{1.2}{\sqrt{2}} + \frac{2.3}{\sqrt{4}} + \frac{3.4}{\sqrt{6}} + \dots \dots$$

$$17. \quad \frac{1.2}{\sqrt{2}} + \frac{2.5}{\sqrt{4}} + \frac{3.8}{\sqrt{6}} + \dots \dots$$

$$18. \quad 1 + \frac{2}{2} + \frac{5}{2.4} + \frac{7}{2.4.6} + \dots \dots$$

$$19. \quad 1 - \frac{2^2}{\sqrt{1}} + \frac{3^2}{\sqrt{2}} - \frac{4^2}{\sqrt{3}} + \dots \dots$$

$$20. \quad \frac{1^2}{\sqrt{1}} + \frac{2^2}{\sqrt{2}} + \frac{3^2}{\sqrt{3}} + \dots \dots$$

$$21. \quad 1 + \frac{1+2}{\sqrt{2}} + \frac{1+2+3}{\sqrt{3}} + \dots \dots$$

$$22. \quad \frac{2.3}{\sqrt{2}} + \frac{3.6}{\sqrt{4}} + \frac{4.7}{\sqrt{6}} + \frac{5.9}{\sqrt{8}} + \dots \dots$$

$$23. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{\sqrt{n}}$$

$$24. \quad 1 + \frac{1+2}{\sqrt{2}} + \frac{1+2+3^2}{\sqrt{3}} + \frac{1+2+3^2+3^2}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$25. \quad \frac{2}{\sqrt{1}} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{4}} + \dots \dots$$

$$26. \sum_1^{\infty} \frac{4n^2 + 2n + 1}{\sqrt{2n}}$$

$$27. \sum_1^{\infty} \frac{2n^2 + n - 2}{\sqrt{2n}}$$

$$28. 1 + \frac{4^2}{\sqrt{2}} + \frac{4^4}{\sqrt{6}} + \frac{4^6}{\sqrt{7}} + \dots \dots \dots$$

$$29. (1 + 2) \log c^2 + \frac{1+2^2}{\sqrt{2}} (\log c^2)^2 \\ + \frac{1+2^3}{\sqrt{8}} (\log c^2)^3 + \dots \dots \dots$$

$$30. \sum_1^{\infty} \frac{n^2 + 2n^2 + 1}{\sqrt{n}}$$

$$31. \sum_1^{\infty} \frac{n^2 + 2}{\sqrt{n}}$$

$$32. \frac{1^2}{\sqrt{2}} + \frac{2^2}{\sqrt{6}} + \frac{3^2}{\sqrt{7}} + \dots \dots \dots$$

$$33. \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}} + \frac{2}{5 \cdot \sqrt{3}} + \frac{3}{6 \cdot \sqrt{4}} + \dots \dots \dots$$

$$34. \frac{1^2}{\sqrt{1}} + \frac{1^2 + 2^2}{\sqrt{2}} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{\sqrt{3}} + \dots \dots \dots$$

$$35. 1^2 - \frac{2^2}{\sqrt{1}} + \frac{3^2}{\sqrt{2}} - \frac{4^2}{\sqrt{3}} + \dots \dots \dots$$

$$36. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{\sqrt{2}} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{3}} + \frac{3 \cdot 6 \cdot 7}{\sqrt{4}} + \dots \dots \dots$$

$$37. \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{4}} + \dots \dots$$

$$38. \quad 1 + \frac{1+a}{2} + \frac{1+a+a^2}{8} + \dots$$

39. e^x இன் வரையறைவற்றை விரித்தெழுதி, x^2 -ன் கெழுக்கை காண்க.

$$(a) \quad (1-x)e^{1+x}$$

$$(b) \quad (1+2x+3x^2)e^{2x}$$

$$(c) \quad \frac{(1+2x-3x^2)}{e^x}$$

$$(d) \quad \frac{2+3x}{e^{2x}}$$

$$(e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+bx)^n}{n}$$

$$(f) \quad (3+2x)e^{2x}.$$

40. $(a+bx)e^{2x}$ -ன் விரிவில் x^2 , x^4 -ன் கெழுக்கள் முறையே $2, \frac{9}{4}$ ஆனால் x^4 -ன் கெழு என்ன?

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+bx)^n}{n}$ என்ற விரிவில் x^{12} , x^{13} -ன் கெழுக்களின் விகிதம் 9 ஆனால், x^{12} , x^{13} -ன் கெழுக்களின் விகிதம் 6 என்ற கண்டுக.

42. λ ஒரு மாநிலியானால்,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \lambda^n}{n!} = \lambda \text{ என நிரூபி.}$$

43. $\frac{e^x - 1}{1 - e^x}$ என்ற விரிவில் x^r -ன் கெழு

$$\frac{1}{r} \cdot (1^r + 2^r + 3^r + \dots + r^r) \text{ என நிரூபக.}$$

$$44. \quad n^{n-1} = n(n-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(n-2)^{n-1} + \dots$$

n உறுப்புகள் = 0 என்று காட்டுக.

$$45. \quad n^{n+1} = n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(n-2)^{n+1} + \dots$$

$$= \frac{1}{24} n(8n+1) \frac{n+2}{2} \quad \text{என்று நிறுவுக.}$$

$$46. \quad (e^x + e^{-x}) \text{-ஐ இரு விலக்களில் விரித்தெழுதி}$$

$$n^2 + n(n-2)^2 + \frac{n(n-1)}{2}(n-4)^2 + \dots$$

$(n+1)$ உறுப்புகள் கூட்டுத்தொகை = $n \cdot 2^n$ என நிறுவுக.

$$47. \quad (e^x - 1)^n \text{ ஐ இருவிலக்களில் விரித்தெழுதி.}$$

$$n^2 - n(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2}(n-2)^2 + \dots$$

n உறுப்புகள் கூட்டுத்தொகை = $\frac{n}{2}$ என நிறுவுக.

$$48. \quad n \text{ ஓர் இயற்கையான எண்ணாக}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n-3} + \dots$$

$$+ \dots = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{1} = \frac{2n-1}{n}$$

என நிறுவுக.

4. மடக்கைத் தொடர்

இவ்வத்திரபாவத்தில் வரும் மடக்கைகள் “ e ”-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டவைகளாகும்.

4.1. மடக்கைத் தேற்றம்

$-1 < x < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \rightarrow (1)$$
$$\dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \text{ அதழிக்கு.}$$

4.2. தேற்றத்தின் விளைவுகள்

$-1 < x < 1$ என்று இருக்கும்போது $-x$ -ம், -1 க்கும், $+1$ க்கும் இடைப்பட்டிருக்கின்றது. எனவே தேற்றத்தின்படி

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

எனவே,

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \text{ அதழிக்கு} \rightarrow (2)$$

(2) + (1) தருவது

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \text{ அதழிக்கு} \right)$$

எனவே

$$\log \frac{(1+x)}{(1-x)} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \text{உத்தமிழிக்கு} \right) \rightarrow (3)$$

(3)-ல் $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$ என்று கொடுத்துச் செய்வதால்—அதாவது

$$x = \frac{m-n}{m+n} \text{ என கொடுத்துச் செய்வதால்}$$

$$\log \frac{m}{n} = 2 \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^5 + \dots \text{உத்தமிழிக்கு} \right\} \rightarrow (4)$$

என்று m, n ஆகியவைகள் மேலுள்ள எட்டுப்பாட்டிற்கு ஆராய்ந்து அதிக. தேற்றத்தினையும், அதன் விளைவின் வழி வந்த சூத்திரங்களையும் பயன்படுத்திச் சில தொடர்களின் தொகைகள் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) = \frac{2ax}{a^2+x^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2ax}{a^2+x^2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2ax}{a^2+x^2} \right)^5 + \dots \text{என்று காட்டுக.}$$

$0 < a < x$ என்று இருக்க முடியாது என்பதை நாம் முதற் கண் ஆறியோம். $0 < a < x$ என்று இருந்தால் $a-x$ ஒரு குறை வயன்னும் இருக்கும். எனவே $\frac{a+x}{a-x}$ ஒரு குறை எண்ணு விருக்கும். எனவே இடக் கைப்பறம் \log [ஒரு குறை எண்.] இது ஒரு உற்பீன எண்ணாகும். ஆனால் வலக் கைப்பறம் ஒரு செய்வெண்ணாக இருக்கும். எனவே $0 < a < x$ ஆக இருக்க முடியாது. இப்படி இருப்பின் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கின் சமத்திற் குப் பொருளில்லை.

எனவே $0 < x < a$. இக்கட்டுப்பாட்டில் $\frac{a+x}{a-x}$ ஒரு கூட்டு எண்ணாகும். மேலும் $0 < \frac{2ax}{a^2+x^2} < 1$. எனவே $y = \frac{2ax}{a^2+x^2}$ என்று கரு சொந்தால் அதை கைப்படுத்தித் கூடுதலாகத் தொட்ட $\left\{ y + \frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{8} + \dots \right\}$ என்ற அமைப்பைப் பெறும்.

$0 < \frac{2ax}{a^2+x^2} < 1$ என்று இருப்பதால் $0 < y < 1$ என்று இருக்கின்றது.

எனவே (8)-ன் படி

$$\begin{aligned} \left\{ y + \frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{8} + \dots \right\} &= \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{2ax}{a^2+x^2}}{1 - \frac{2ax}{a^2+x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(a+x)^2}{(a-x)^2} \\ &= \log \frac{a+x}{a-x} \\ &= \text{இடக் கைப்பாடு} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{8(2n^2-1)^2} + \frac{1}{8(2n^2-1)^2} + \dots \right] \\ \text{கத்தழி வரை} \end{aligned} \approx \log \frac{n^2}{n^2-1} \text{ என்று காட்டுக.}$$

இ-கூ. படித்தில் $\frac{1}{2n^2-1} = x$ என கரு சொக.

$$\therefore \text{இ.கக.பு.} = 2 \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \text{கத்தழி வரை} \right]$$

$$= \log \frac{1+x}{1-x} \text{ [(8)-ல் படி].}$$

சுருது $-1 < x < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்க வேண்டும். (இதனால் n -வகைக் ஏற்படும் கட்டுப்பாட்டை ஆராய்க.)

$$\therefore \text{இ.கக.பு.} = \log \frac{(1+x)}{(1-x)}$$

$$= \log \frac{1 + \frac{1}{2n^2-1}}{1 - \frac{1}{2n^2-1}}$$

$$= \log \frac{2n^2}{2n^2-2}$$

$$= \log \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \text{வ.கக.பு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\log(x+h) = 2 \log(x+h) - \log x -$$

$$\left[\frac{h^2}{(x+h)^2} + 2 \frac{h^4}{(x+h)^4} + 2 \frac{h^6}{(x+h)^6} + \dots \right]$$

என்று அறிக.

வகை கைப்புதத்தில் $y = \frac{h}{x+h}$ என்று எடு செய்க. சுருது $x > 0$, $h > 0$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம். இதனால் $0 < \frac{h}{x+h} < 1$ என்று கட்டுப்பாட்டில் அமைகின்றது.

$$\therefore \text{வ.கக.பு.} = 2 \log(x+h) - \log x$$

$$= \left[y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{8} + \dots \right].$$

$y^2 = x$ என்று எடு செய்க.

எனவே,

$$\begin{aligned} \left[y^2 + \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{8} + \dots \right] &= z + \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{8} + \dots \\ &= -\log(1-z) \\ &(\because (2)-(1) \text{ ல் } \log). \end{aligned}$$

எனவே,

$$\begin{aligned} \text{வ.கக.ப.} &= 2 \log(x+h) - \log x + \log(1-y^2) \\ &= 2 \log(x+h) - \log x + \log \left(1 - \frac{h^2}{(x+h)^2} \right) \\ &= 2 \log(x+h) - \log x + \log \frac{(x+h)(x)}{(x+h)^2} \\ &= \log \frac{(x+h)^2}{x} - \frac{(x+h)x}{(x+h)^2} \\ &= \log(x+h) \\ &= \text{இ.கக.ப.} \end{aligned}$$

மேற்கூறியதில் 4 :

x இன் மதிப்பை ஏதேனாகும்போது

$$\log x = \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4-1}{(x+1)^4} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{வ. கக. ப.} &= \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4-1}{(x+1)^4} - \dots \\ &= \left\{ \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{x^4}{8 \cdot (x+1)^4} + \dots \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{8(x+1)^4} + \dots \right\} \\ &= \left\{ y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{8} y^4 + \dots \right\} \\ &= \left\{ z + \frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{8} + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\text{எனவே } y = \frac{x}{x+1} \quad \& \quad z = \frac{1}{x+1}$$

எனவே, (2)-ல் பயன்படுத்தினால்,

$$\begin{aligned} \text{வ. கக. ப.} &= -\log(1-y) + \log(1-x) \\ &= \log \frac{(1-x)}{(1-y)} \\ &= \log \frac{\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)}{\left(1 - \frac{x}{x+1}\right)} \\ &= \log \frac{x/x + 1}{1/x + 1} \\ &= \log x \\ &= \text{இ. கக. ப.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

a, b, c என்பவை அடுத்தடுத்து வரும் மூன்று கூட்டு முழு எண்களாகில்,

$$\log b = \left\{ \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log c + \frac{1}{2ac+1} + \frac{1}{8(2ac+1)^2} + \dots \dots \text{அத்தழிவரை} \right\}$$

என்று காட்டுக.

வலக் கைப்புறத்தில் $\frac{1}{2ac+1} = y$ என்று எடு செய்க.

$$\begin{aligned} \text{எனவே வ.கக.ப.} &= \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log c + y + \frac{y^2}{8} + \dots \dots \\ &= \frac{1}{2} \log ac + \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} \quad (\because (3)\text{-ன்படி}) \\ &= \frac{1}{2} \log ac + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{1}{2ac+1}}{1 - \frac{1}{2ac+1}} \\ &= \frac{1}{2} \log ac + \frac{1}{2} \log \frac{2(ac+1)}{2ac} \\ &= \frac{1}{2} \log ac \cdot \frac{(ac+1)}{ac} \\ &= \frac{1}{2} \log (ac+1) \end{aligned}$$

ஆனால் a, b, c என்ற மூன்றும் அடுத்தடுத்து வரும் எண்கள்.
எனவே $a+1=b$; $b+1=c$

$$\therefore ac = (b+1)(b-1) = b^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே வ.க.க.பு.} &= \frac{1}{2} \log (b^2 - 1 + 1) \\ &= \frac{1}{2} \log b^2 \\ &= \log b \\ &= \text{இ.க.க.பு.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$ என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுப்பு $= \frac{x^n}{n \cdot (n+1)}$
ஆகும். இதை u_n என்று குறிப்போம்.

$$\begin{aligned} \therefore u_n &= \frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n+1-n)}{n(n+1)} \cdot x^n \\ &= \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right\} x^n \\ &= \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} \end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ என எடு செய்வதால்

$$u_1 = \frac{x}{1} - \frac{x}{2}$$

$$u_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}$$

$$u_3 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{4}$$

\vdots

எந்தழி வரை.

கூடுதல் கண்டால்,

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 + u_3 + \dots & \text{அத்தழி வரை} \\
 &= \left\{ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \text{அத்தழி வரை.} \right\} \\
 &= \left\{ \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \text{அத்தழி வரை.} \right\} \\
 &= -\log(1-x) - \frac{1}{x} \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right\} \\
 &= -\log(1-x) - \frac{1}{x} \left\{ -\log(1-x) - x \right\} \\
 &= -\log(1-x) + \frac{1}{x} \log(1-x) + 1 \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \log(1-x) \\
 &= 1 + \frac{1-x}{x} \log(1-x)
 \end{aligned}$$

மேகதொடர் 7 :

$$\left\{ \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{5 \cdot 6} + \dots \dots \text{அத்தழிவரை.} \right\}$$

இத்தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் n ஆவது உறுப்பு

$$\frac{x^n}{(2n-1)(2n)} \text{ ஆகும்.}$$

இதை u_n என்று குறிப்போம். எனவே

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{x^n}{(2n-1)(2n)} = \frac{\{2n - (2n-1)\} x^n}{(2n-1)(2n)} \\
 &= \frac{x^n}{2n-1} - \frac{x^n}{2n}
 \end{aligned}$$

இனி $n = 1, 2, 3, \dots$ என கூடு செய்வோம்.

$$\begin{aligned} \therefore u_1 &= \frac{x}{1} - \frac{x}{2} \\ u_2 &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

எனவே

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \dots &= \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \\ &\quad - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots \right) \end{aligned}$$

$\left\{ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right\}$ -இதை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{இதை } \left\{ (\sqrt{x})^2 + \frac{(\sqrt{x})^4}{2} + \frac{(\sqrt{x})^6}{3} + \dots \right\}$$

என்று எழுதலாம்.

எனவே $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \left\{ (\sqrt{x})^2 + \frac{(\sqrt{x})^4}{2} + \frac{(\sqrt{x})^6}{3} + \dots \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots \right\} \\ &= \sqrt{x} \left\{ \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^3}{2} + \frac{(\sqrt{x})^5}{3} + \dots \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right\} \\ &= \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1}{2} \log (1 - x) \\ &\quad (\because (2) \text{ ஐவும், } (3) \text{ ஐவும் பயன்படுத்தினால்}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{x} \log \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) + \log (1 - x) \right\} \end{aligned}$$

தேற்றம் 2 :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \text{கத்தழி வரை,}$$

→ (5)

இவ்விரண்டு தேற்றங்களின் மெய்ப்பாடுகளை மூன்றாம் பாகத்தில் காணலாம்.

குறிப்பு :

தேற்றம் 1. $-1 < x < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குள்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

என்று கூறுகின்றது.

இதில் $x = 1$ என எடு செய்தால்

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

என்று கிடைக்கின்றது.

தேற்றம் 2-ன் படி, இது உண்மையாகும்.

எனவே மடக்கைத் தேற்றத்தை

$$\begin{aligned} & -1 < x < 1 \text{ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு} \\ & \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

இனி தேற்றம் 2 ஐ ஐப் பயன்படுத்திச் சில தொடர்களின் தொகை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\log \frac{4}{e} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.8} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots$$

என்று காண்க.

வரக் கூடிய பதத்தில் உள்ள தொடரின் n ஆவது உறுய்

$$= \frac{1}{n(n+1)} \cdot (-1)^{n+1}.$$

இதை u_n எனக் குறிப்போம்.

$$\begin{aligned} \therefore u_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ என எடுத்துச் செய்தால்

$$u_1 = (1 - \frac{1}{2})$$

$$u_2 = -(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$$

$$u_3 = (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$$

⋮
⋮
⋮
⋮

எனவே $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$

$$= (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots) + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots)$$

$$= \log 2 + \log 2 - 1$$

$$= \log 4 - 1$$

$$= \log 4 - \log e$$

$$= \log \frac{4}{e}.$$

$$= \underline{\underline{\log 4 - 1}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \text{ இத் தொடரின்}$$

தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n ஆவது உறுதி

$$\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} \text{ ஆகும்.}$$

இதை u_n எனக் கொள்வோம்

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$\therefore u_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right]$$

\vdots

சுத்திக்கும்.

எனவே,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\log 2) - \frac{1}{2} (-\log 2 + 1)$$

$$= \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \dots = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.6.7} + \frac{1}{5.10.11} \dots = \frac{1}{4} \log 2$$

எனக் காட்டுக.

இடக் கவப்புதற் தொடரின் n -ஆவது உறுப்பு

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)} \\
 &= \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n-1} \right)
 \end{aligned}$$

இதை u_n எனக் கொண்டு $n = 1, 2, 3, \dots$ என கூடு செல்வோம்.

$$\begin{aligned}
 \text{தரம் } u_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{2(4n-2)} \right)
 \end{aligned}$$

என்று எழுதலாம்.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore u_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

எனவே

$$\begin{aligned}
 u_1 + u_2 + u_3 + \dots &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \right) \\
 &= \frac{1}{4} \log 2.
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 11:

$\frac{1}{2} + \frac{8}{2 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 8} + \frac{7}{4 \cdot 16} + \dots \dots = 2 - \log 2$ என்று காட்டுக.

u_n என்பது இ. கை. புறத் தொடரின் n ஆவது உறுப்பு எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \therefore u_n &= \frac{2n-1}{n \cdot 2^n} \\ &= \frac{2}{2^n} - \frac{1}{n \cdot 2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{n \cdot 2^n} \end{aligned}$$

$$\therefore u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$u_3 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3}$$

\vdots

சுத்தெழ்த்து.

எனவே,

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \text{சுத்தெழ்த்து} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \dots \dots \right) \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \log \left(1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 + \log \frac{1}{2} \\ &= 2 - \log 2 \\ &= \text{அ. கை. பு.} \end{aligned}$$

4.3. x ஐ அடிவாகக் கொண்ட எண்களின் மடக்கைகளின் மதிப்பிதல்

4.2. தேற்றத்தின் விளைவுகளில் நாம்

$$\log \frac{m}{n} = 2 \left\{ \frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^5 + \dots \text{கத்தழி வரை} \right\}$$

என்று பர்த்தோம். அவற்றிலிருந்து நாம் x ஐ அடிவாகக் கொண்ட எண்களின் மடக்கைகளின் மதிப்பை அறிவோம்.

தமக்கு $\log \frac{8}{5}$ -ன் மதிப்பு வேண்டுமாயின், $m=8$; $n=5$ எனக் கொள்வோம்.

$$\log \frac{8}{5} = 2 \left[\frac{1}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{11^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{11^5} + \dots \right]$$

$\therefore \log \frac{8}{5} = \cdot 182,821,56$	$\frac{2}{11} = \cdot 181,818,18$
[தோராயமாக]	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11^3} = \cdot 000,500,88$
$= \cdot 182,822$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{11^5} = \cdot 000,002,48$
	$\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{11^7} = \cdot 000,000,01$

$\left. \begin{array}{l} \text{இவ்விதமாக எல்லா எண்களின்,} \\ x \text{ ஐ அடிவாகக் கொண்ட} \\ \text{எண்களின் மடக்கைகளின்} \\ \text{மதிப்பிடுவோம்.} \end{array} \right\}$	$= \cdot 182,821,56$
---	----------------------

4.4. விரிவாக்கம்

$\log (a+bx) \text{ ஐ விரித்தல்}$

$$\begin{aligned} \log (a+bx) &= \log a \left(1 + \frac{b}{a} x \right) \\ &= \log a + \log \left(1 + \frac{b}{a} x \right) \end{aligned}$$

$$= \log a + \left\{ \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{2a^2}x^2 + \frac{b^3}{3a^3}x^3 - \dots \right\}$$

மேல்க்க வற்றில் $\left| \frac{b}{a}x \right| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டை ஏற்றி விரிக்கின்றோம்.

அதாவது $|x| < \left| \frac{a}{b} \right|$ என்று அக் கட்டுப்பாடு அமைகின்றது.

குறிப்பு: மேற்கூறிய வற்றில் $\log(1+px+qx^2)$ என்ற மட்டக்கடலிலேயும் விரிக்கலாம். x -ன் மேல்க்க கட்டுப்பாடு இக்கு மாறுபடவதும் கண்டறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\log \frac{1}{8+x-x^2}$ -ன் விரிவத்தில் x^2 -ன் கெழு

$$\frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{8^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} \right\} \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{8+x-x^2} &= \log \frac{1}{(8-x)(2+x)} \\ &= \{ -\log(8-x) - \log(2+x) \} \\ &= -\log 8 \left(1 - \frac{x}{8} \right) - \log 2 \left(1 + \frac{x}{2} \right) \\ &= -\log 8 - \log \left(1 - \frac{x}{8} \right) - \log 2 - \log \left(1 + \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -\log 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{8} \right)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x}{2} \right)^n.$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2\text{-ன் கெழு} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{8^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} \right) \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$\log \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ -ன் விரிவத்தில், n இரட்டைப்படை என்றால், x^n -ன் கெழு பூச்சியம் என்பதை மெய்யப்படுத்துங்கள்.

$$1-x^2 = (1-x)(1+x+x^2)$$

$$1+x^2 = (1+x)(1-x+x^2)$$

$$\therefore \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \frac{(1-x^2)(1+x)}{(1+x^2)(1-x)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= \log \frac{(1-x^2)(1+x)}{(1+x^2)(1-x)} \\ &= \log \frac{(1-x^2)}{(1-x)} + \log \frac{(1+x)}{(1+x^2)} \\ &= 2 \left[x + \frac{x^2}{2} + \dots \right] - 2 \left[x^2 + \frac{x^2}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

ஆகவே x ஒரு நேர் மூலு என்றால்,

$$\therefore x^{2r}\text{-ன் கெழு} = 0.$$

$\therefore \log \frac{(1+x+x^2)}{(1-x+x^2)}$ -ன் விரிவத்தில் $x^{2r} = x^n$ -ன் கெழு 0 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\log \frac{1}{2x^2-5x+2}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு $\frac{1}{n} \left(2^n + \frac{1}{2^n} \right)$ என்று காட்டுக. $|x| < \frac{1}{2}$ என்று எடுத்துக் கொள்ள.

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{2x^2-5x+2} &= \log \frac{1}{(2x-1)(x-2)} \\ &= \log \frac{1}{(1-2x)(2-x)} \\ &= -\log(1-2x) - \log(2-x) \end{aligned}$$

$$= -\log(1-2x) - \log 2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \log 2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right) x^n - \log 2$$

$$\therefore x^n\text{-ன் கெழு} = \frac{1}{n} \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right) \text{ ஆகும்.}$$

4.5. மூற்றெழுமைகள்

$\log(a+bx+cx^2 + \dots)$ என்ற மடக்கை இரு வழிகளில் x -ன் படிகளில் விரிக்கப்படுமாயின், நாம் ஒத்த படியுள்ள x -ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தலாம். இவ்வாறு சமப்படுத்தும்போது பல மூற்றெழுமைகள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$ax^2+bx+c=0$ -ன் மூலங்களால் α , β இருபின் $\log(a-bx+cx^2) = \log a + (\alpha+\beta)x - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3 - \dots$ என்று வர்ட்டு.

α , β என்பன $ax^2+bx+c=0$ -ன் மூலங்களாதலால்

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\begin{aligned} \therefore (a-bx+cx^2) &= a \{ 1 + \overline{\alpha+\beta}x + \alpha\beta x^2 \} \\ &= a(1+\alpha x)(1+\beta x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \log (a-bx+cx^2) &= \log a(1+\alpha x)(1+\beta x) \\
&= \log a + \log(1+\alpha x) + \log(1+\beta x) \\
&= \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \alpha^n x^n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \beta^n x^n \\
&= \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\alpha^n + \beta^n) x^n \\
&= \log a + (\alpha + \beta)x - \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2} x^2 \\
&\quad + \frac{\alpha^3 + \beta^3}{3} x^3 - \dots
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$\log(1-x)^2$ -ஐ இரு வழிகளில் கிடைத்து

$$\begin{aligned}
2^2 - 2 \cdot 2^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} 2^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{n-6} + \dots \\
= 2 \quad \text{என்று காட்டு.}
\end{aligned}$$

$$\log(1-x)^2 = 2 \log(1-x)$$

$$= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\therefore \log(1-x)^2 \text{-ன் } x^n \text{-ன் கெழு} = -\frac{2}{n}. \quad \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned}
\text{ஆனால் } \log(1-x^2) &= \log(1-2x+x^2) \\
&= \log\{1-x(2-x)\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(2-x)^n}{n}.
\end{aligned}$$

இதில் x^n -ன் கெழு என்னவென்று ஆராய்வோம்.

$$\log (1-x)^{-1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (2-x)^n}{n} = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{x^r (2-x)^r}{r}$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{x^r (2-x)^r}{r} = \text{இதில் } x^r \text{ உறுதியுடன் இருக்கிறது.}$$

$$\text{எனவே} = \sum_{r=1}^n \frac{x^r (2-x)^r}{r} \text{ -ஓ } x^n \text{-ஓ கெழுவினைக் காண}$$

கொண்டோம்.

$$= \sum_{n=1}^n \frac{x^r (2-x)^r}{r} = - \left[\frac{x^n (2-x)^n}{n} + \frac{x^{n-1} (2-x)^{n-1}}{n-1} \right. \\ \left. + \frac{x^{n-2} (2-x)^{n-2}}{n-2} + \frac{x^{n-3} (2-x)^{n-3}}{n-3} + \dots \dots \right]$$

$$\frac{x^n (2-x)^n}{n} \text{ -ஓ } x^n \text{-ஓ கெழு} + \frac{2^n}{n} \text{ ஆகும்;}$$

$$\frac{x^{n-1} (2-x)^{n-1}}{(n-1)} \text{ -ஓ } x^{n-1} \text{-ஓ கெழு} = 2^{n-1} \text{ ஆகும்;}$$

$$\frac{x^{n-2} (2-x)^{n-2}}{(n-2)} \text{ -ஓ } x^{n-2} \text{-ஓ கெழு} + 2^{n-2} \frac{(n-2)x_2}{(n-2)} \text{ ஆகும்.}$$

$$(ie) \quad \dots \dots \dots (n-3)2^{n-3} \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{x^{n-3} (2-x)^{n-3}}{n-3} \text{ -ஓ } x^{n-3} \text{-ஓ கெழு} = 2^{n-3} \frac{(n-3)x_3}{n-3} \text{ ஆகும்.}$$

$$(ie) \quad \dots \dots \dots = 2^{n-4} \cdot (n-4)(n-5) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே

$$= \sum_{r=1}^n \frac{x^r (2-x)^r}{r} \text{ -ஓ } x^n \text{-ஓ கெழு} = - \left\{ \frac{2^n}{n} - 2^{n-1} \right. \\ \left. + (n-3)2^{n-4} - (n-4)(n-5)2^{n-5} + \dots \right\}$$

∴ $\log(1-x)^3$ -ல் x^n -ல் கெழு

$$= - \left\{ \frac{3^n}{n} - 2^{n-1} + (n-3)2^{n-2} - (n-4)(n-5)2^{n-3} + \dots \right\}$$

(1) இவை (2) இவை ஒன்றி. (2)

$$- \frac{3}{n} = - \left\{ \frac{3^n}{n} - 2^{n-1} + (n-3)2^{n-2} - (n-4)(n-5)2^{n-3} + \dots \right\}$$

$$\therefore 3 = 3^n - n \cdot 2^{n-1} + n(n-3)2^{n-2} - n(n-4)(n-5)2^{n-3} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 17:

$a + b + c = 0$ என்ற இருக்கிறபொழுது

$$\sum \frac{a^7}{7} = \sum \frac{a^6}{6} \cdot \sum \frac{a^2}{3} \text{ என்ற கருத்து.}$$

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx) = 1 - (a+b+c)x + (ab+bc+ca)x^2 - abc x^3 \text{ என்பதைக் கவனித்தல்.}$$

$$\therefore (1-ax)(1-bx)(1-cx) = 1 + (ab+bc+ca)x^2 - abc x^3 \quad \left[\because a+b+c=0 \right]$$

$$p = ab+bc+ca$$

$$q = abc \quad \text{என்று வைத்துக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore (1-ax)(1-bx)(1-cx) = 1 - px^2 - qx^3 = 1 + x^2(p-qx).$$

$$\therefore \log(1-ax)(1-bx)(1-cx) = \log \{1 + x^2(p-qx)\} = \log \{1 - x^2(qx-p)\}$$

x -ல் தருதியை மதிப்பிடுதல்

$$\begin{aligned} & \left(ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^3 x^3}{3} + \dots \right) + \left(bx + \frac{b^2 x^2}{2} + \frac{b^3 x^3}{3} + \dots \right) \\ & \quad + \left(cx + \frac{c^2 x^2}{2} + \frac{c^3 x^3}{3} + \dots \right) \\ &= x^2(qx-p) + \frac{x^4(qx-p)^2}{2} + \frac{x^6(qx-p)^3}{3} \\ & \quad + \frac{x^8(qx-p)^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

எனவே, இரு பக்கங்களில் உள்ள x^3 -ல் கெழுக்களை ஒன்றிவைக்க,

ஒப்பிட்டு $\frac{1}{7}(a^7+b^7+c^7) = p^3$ என்று கிடைக்கின்றது. ... (1)
 x^4 -ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டு

$$\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4) = \frac{1}{8} p^2$$

$$\text{அதாவது, } \frac{1}{8}(a^4+b^4+c^4) = p^2 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

x^2 -ன் கெழுக்களை ஒப்பிட்டு

$$\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2) = q \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(2) \times (3) தருவது

$$\frac{1}{8} \sum a^4 \cdot \frac{1}{8} \sum b^2 = p^2 q.$$

(1)-ன் கவனப் புறத்திற்கு இதைப் பயனிட.

$\sum \frac{a^7}{7} = \sum \frac{a^4}{2} \cdot \sum \frac{b^2}{8}$ என்று விடை கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

காரணிப்படுத்துக :

$$(a+b)^7 - a^7 - b^7.$$

$(1-ax)(1-bx) = 1 - (a+b)x + abx^2$ என்று எழுதுவதை நோக்குக.

$$\left. \begin{array}{l} p = a+b \\ q = ab \end{array} \right\} \text{ என்க.}$$

$$\therefore (1-ax)(1-bx) = 1 - px + qx^2$$

$$\text{எனவே } \log (1-ax)(1-bx) = \log (1-px+qx^2)$$

$$\text{அதாவது } -\log (1-ax)(1-bx) = -\log (1-px+qx^2)$$

$$\begin{aligned} \text{அதாவது } -\log (1-ax) - \log (1-bx) = \\ -\log \{ 1-x(p-qx) \} \end{aligned}$$

இ. க. - 8

இடக் கைப்புறத்தில் x^7 -ன் கெழு $\frac{a^7 + b^7}{7}$ ஆகும். ... (A)

$$\text{வ.கை.பு.} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (p-qx)^n}{n}.$$

இதில் x^7 -ன் கெழுக்கை $\frac{x^7 (p-qx)^7}{7}$ என்று உறுப்பிலும், அதற்கு முன் உள்ள உறுப்புகளிலும் கட்டுத்தால் இவற்றும்.

$$\frac{x^7 (p-qx)^7}{7} \text{-ல் } x^7 \text{-ன் கெழு} = \frac{p^7}{7}.$$

$$\frac{x^8 (p-qx)^8}{8} \text{-ல் } x^7 \text{-ன் கெழு} = -\frac{8c_1}{8} \cdot p^6 q$$

$$\frac{x^9 (p-qx)^9}{9} \text{-ல் } x^7 \text{-ன் கெழு} = \frac{5c_1}{9} \cdot p^5 \cdot q^2$$

$$\frac{x^{10} (p-qx)^{10}}{10} \text{-ல் } x^7 \text{-ன் கெழு} = -\frac{4c_1}{4} \cdot p \cdot q^3.$$

$$\frac{x^{11} (p-qx)^{11}}{11} \text{-ல் } x^7 \text{-ன் கெழு} = 0.$$

!

∴ வலக் கைப்புறத்தில் x^7 -ன் கெழு

$$= \frac{p^7}{7} - p^6 q + 2p^5 q^2 - p q^3. \quad \dots \quad (B)$$

∴ (A) ஐயும் (B) ஐயும் ஒப்பிட்டு

$$\frac{a^7 + b^7}{7} = \frac{p^7}{7} - p^6 q + 2p^5 q^2 - p q^3$$

$$\begin{aligned} \text{அதாவது } \frac{a^7 + b^7}{7} &= \frac{(a+b)^7}{7} - (a+b)^6 ab \\ &\quad + 2(a+b)^5 a^2 b^2 - (a+b)^4 a^3 b^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a+b)^7 - a^7 - b^7 &= 7(a+b)^6 ab - 14(a+b)^5 a^2 b^2 + \\ &\quad 7(a+b)^4 a^3 b^3 \\ &= 7ab(a+b) [(a+b)^4 - 2(a+b)^3 ab + a^2 b^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 7ab(a+b) [(a+b)^2 \{ (a+b)^2 - 2ab \} + a^2b^2] \\
 &= 7ab(a+b) [(a+b)^2 (a^2+b^2) + a^2b^2] \\
 &= 7ab(a+b) [(a^2+b^2)^2 + 2ab(a^2+b^2) + a^2b^2] \\
 &= 7ab(a+b) (a^2+b^2+ab)^2
 \end{aligned}$$

எனவே $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.ab$.

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$\log(1-x+x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ என்று இருந்தால்
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{8}{9} \log 2$ என்று காட்டவும்.

$$\begin{aligned}
 \log(1-x+x^2) &= \log\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) \\
 &= \log(1+x^2) - \log(1+x) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x^2)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \quad (A)
 \end{aligned}$$

ஆனால் $\log(1-x+x^2) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ (B)

$$\begin{aligned}
 \therefore a_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
 a_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
 a_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
 a_{11} &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

எனவே

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 + a_3 + \dots &\text{ காட்டப்படுகிறது} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) \\
 &= \log 2 - \frac{1}{2} \log 2 \\
 &= \frac{8}{9} \log 2
 \end{aligned}$$

4.6. தோராய மதிப்பறிதல்

படிக்குறி, மடக்கைத் தேற்றங்களை ஒருங்கே பயன்படுத்திச் சில கோவைகளின் தோராய மதிப்புகளை இப்பிரிவில் காணலாம். மேலும் சில எதில்களின் மதிப்புகளையும் இவைகளின் பயனாக அறிவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$(1+x)^{1+x} \doteq 1+x+x^2+\frac{x^3}{6}$, என்று x^4 , அதற்கு மிகை வள்ள படிவரைக் கொண்டுள்ள x ஆகியவைகளை நீக்கிவிடலாம். மேற்கண்ட தோராயத்தைப் பயன்படுத்தி $(1.01)^{1.01}$ -ன் தோராய மதிப்பறிதல்.

$$(1+x)^{1+x} = e^{\log(1+x)^{1+x}} \text{ என்று எழுதலாம்.}$$

$$= e^{(1+x) \log(1+x)}$$

$$\doteq e^{(1+x) \left\{ 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} \right\}} \quad \{ \log(1+x)\text{-ன் விரிவில் } x^4, x^5, \dots \text{ ஆகியவைகளை நீக்கிவிட்டுள்ளோம். } \}$$

$$\doteq e \left\{ x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}$$

இங்கேயும் x^4 உறுப்பை நீக்கி விட்டுள்ளோம். (ஏன் ?)

$$\begin{aligned} &\doteq 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{1}{2!} \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)^3 + \dots \\ &\doteq 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2!} (x^2 + x^3) + \frac{1}{3!} x^3 \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2}. \end{aligned}$$

எனவே,

$$(1+x)^{1+x} \doteq 1+x+x^2+\frac{x^3}{2}.$$

$x = 0.01$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$(1.01)^{1.01} \approx 1 + 0.01 + 0.0001 + \frac{0.000001}{2} \\ = 1.0101005$$

$$\therefore (1.01)^{1.01} \approx 1.0101005$$

பயிற்சி 4 (அ)

$$1. \log \left(\frac{n+1}{n-1} \right) = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{2n}{n^2+1} \right)^3 \\ + \frac{1}{5} \left(\frac{2n}{n^2+1} \right)^5 + \dots \text{ எனது கருத்து.}$$

$$2. \frac{1}{2} \log \left(\frac{x}{x-1} \right) = \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2x-1)^3} \\ + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x-1)^5} + \dots \text{ எனது தீர்வு.}$$

$$3. \log \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{8(2n+1)^3} \\ + \frac{1}{8(2n+1)^5} + \dots \text{ எனது தீர்வு.}$$

$$4. -1 < x < \frac{1}{2} \text{ ஆனால், } 2 \left(x + \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{6} + \dots \right) \\ = \frac{2x}{1+x} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1-x} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{2x}{1-x} \right)^4 + \dots \\ \text{எனது கருத்து.}$$

$$5. n < 1 \text{ ஆனால் } \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2(1+n)^2} \\ + \frac{1}{8(1+n)^4} + \dots \dots \infty \\ = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^3} - \dots \infty \text{ எனது கருத்து.}$$

$$6. \log_e y = 2 \left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{8} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^5 + \dots \right] \text{ எனது கருத்து.}$$

$$7. \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$= 2 \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7^3} + \dots \right)$$

எனக் கருது.

$$8. \quad \frac{8}{10} \left[\log_2 10 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{8}{2^{12}} + \frac{1}{8} + \frac{8^2}{2^{21}} + \dots \right]$$

$$= \log_2 8 \text{ என்று திறவுக.}$$

$$9. \quad \log 8 = 1 + \frac{1}{8 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \dots$$

எனக் கருது.

$$10. \quad \log_2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2 \cdot 3(n+1)^2}$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 4(n+1)^3} + \dots \infty \text{ என்று திறுது.}$$

$$11. \quad \log_2 10 = 3 \log_2 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

என்று கருது.

$$12. \quad \log 9 = \log 3 + 2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right\}$$

என்று கருது.

$$13. \quad \log_2 \sqrt{12} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{4^2}$$

$$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) \frac{1}{4^3} + \dots \infty \text{ என்று கருதுக.}$$

$$14. \quad \log_2 \sqrt{10} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9^2} + \dots \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8 \cdot 9^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8^2} + \dots \right) \text{ என்று காண்க.}$$

$$15. \quad \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^3$$

$$+ \frac{1}{5} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^5 + \dots \text{ என்று கருதுக.}$$

(B)

கீழ்க்கண்டவற்றில் எத்தனைத் தொகுதிகள் கூட்டுத் தொகையைக் காட்டுக:

$$1. \frac{1}{1.2.3} + \frac{5}{3.4.5} + \frac{9}{5.6.7} + \frac{13}{7.8.9} + \dots \dots \infty$$

$$2. \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \dots \dots \dots \infty$$

$$3. \frac{1}{1.1.2} + \frac{1}{2.2.3} + \frac{1}{3.3.4} + \frac{1}{4.4.5} + \dots \dots \dots \infty$$

$$4. \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} - \frac{1}{4.5.6} + \dots \dots \dots \infty$$

$$5. \frac{5}{1.2.3} + \frac{7}{3.4.5} + \frac{9}{5.6.7} + \dots \dots \dots \infty$$

$$6. \frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{3.4.6} + \frac{1}{5.6.8} + \dots \dots \dots \infty$$

$$7. \frac{4x}{2.3.4} + \frac{7x^2}{3.4.5} + \frac{10x^3}{4.5.6} + \dots \dots \dots \infty$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+25}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{10^n}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n-2}{n(n+1)(n+2)} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$10. \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{9} \\ + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \frac{1}{9^2} + \dots$$

$$11. \frac{x^2}{1.3} + \frac{x^4}{3.5} + \frac{x^6}{5.7} + \dots \dots \infty.$$

$$12. \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{4}{5} x^5 + \dots \dots \infty. (|x| < 1)$$

(c)

1. $\log(1+x+x^2+x^3)$ -ன் விரிவை ஏறும வரிசையில் எழுதி, x^2 -ன் கெழு, n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால் $\frac{1}{n}$ என்றும், அல்லது n ஆனது $4m+2$, $4m$ என்ற அமைப்பில் இருந்தால் x^2 -ன் கெழு மூன்றாவே $\frac{1}{n}$, $-\frac{2}{n}$ ஆகும் என்றும் நிறுவுக.
2. $|x| < 1$ ஆனால் $\log\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$ என்ற விரிவில் x^{2n} -ன் கெழு பூச்சியமாகும்.
3. $\log(6x^2-17x+12)$ ஐ x -ன் ஏறு வரிசையில் எழுதி, $|x| < \frac{4}{9}$ என்றும் x^2 -ன் கெழு $-\frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{9}{4}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n \right\}$ என்று காட்டுக.
4. $|x| < 1$ ஆனால், $\log(8+2x-x^2)$ -ன் விரிவை எழுதி அதில் x^n -ன் கெழு $\frac{1}{n} \left\{ (-1)^{n-1} - \frac{1}{8^n} \right\}$ என்று காட்டு.
5. $\log(1-x+x^2-x^3+x^4)$ -ன் விரிவை ஏறு வரிசையில் எழுதி x^{2n} -ன் கெழு $(-1)^{n-1} \frac{4}{9^n}$ என்று காண்க.
6. $|x| < \frac{1}{2}$ ஆனால் $\log_e(1+3x+2x^2)$ ஐ x -ன் ஏறு வரிசையில் எழுதி, x^n -ன் கெழு $(-1)^n \frac{2^n+1}{n}$ என்று காண்க.
7. $\log \frac{4}{1-x-2x^2}$ என்ற விரிவில் x^n -ன் கெழு $\frac{1}{n}$ அல்லது $\frac{2}{n}$ (மூன்றாவே $n, 2$ -ன் மடங்காக இரண்டு; $n, 3$ -ன் மடங்காக இருக்கும்) என்று காட்டு.
8. $|x| < \frac{1}{9}$ ஆனால், $\log_e(1+5x+6x^2)$ -ல் x^n -ன் கெழு $(-1)^n \frac{2^n+3^n}{9^n}$ எனக் காண்க.

9. $\log (1-2x+2x^2)$ ஐ இரு வழிகளில் விரித்து,

$$2^n - n.2^{n-1}, 2 + \frac{n(n-2)}{1.2} 2^{n-2}, 2^2 \\ - \frac{n(n-4)(n-6)}{1.2.3} 2^{n-3}, 2^3 + \dots = 2^n + 1$$

என்று நிறுவுக.

10. x மிகச் சிறியதாக இருப்பின்,

$$\log \left\{ (1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}} \right\} = \log_e 2 - \frac{x^2}{8}.$$

தேர்வுபயமாக.

11. n மிகப் பெரிதாக இருப்பின்,

$$\left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n = e^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) \text{ தேர்வுபயமாக.}$$

12. மிகச் சிறிய x -க்கு $\log \frac{1+2x^2}{3} = \frac{2}{3} x + \frac{x^4}{9}$ தேர்வுபயமாக.

5. தொடர்களின் கூட்டல்

5.1. சைந்த அத்தியாயங்களில் சில வகைப்பட்ட தொடர்களின் கூட்டுத் தொகைகளைக் கண்டோம். இனி இவ்வத்தியாயத்தில் வேறு வகைப்பட்ட தொடர்களின் தொகைகளைக் காணும் முறையினை விளக்குவோம்.

குறிப்புகள் :

தாம் $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ என்று தொடரின் உறுப்புகளைக் குறிப்பிடுவோம். S_n என்றும், S_{2n} என்றும் முறையே முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையினையும், கத்தழித் தொடரின் குனி கூட்டுத் தொகையினையும் குறிப்போம்.

$$\therefore S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$$S_{2n} = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \text{ (குனி தொடர்)}$$

5.2. வகை 1 :

வேறுபாடு முறை :

தொகை காணப் பொதுவாக u_r என்ற உறுப்பை $u_{r+1} - u_r$ என்குவது. அதிர் $u_r = u_{r+1}$ என்குவது அமைத்தால் நமக்கு

$$u_n = u_{n+1} - u_n$$

$$u_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_2 = u_3 - u_2$$

$$u_1 = u_2 - u_1$$

தொடர்களின் கூட்டம்

கூட்டிச் சமன் காணின்,

$$S_n = v_{n+1} - v_1$$

$$v_n = v_n - v_{n-1} \text{ என இருப்பின்,}$$

$$S_n = v_1 - v_{n+1}$$

8.8. பகுதியின் மூலம் :

சில தொடர்களில் v_r ஐப் பகுதியில் பின்னங்களாகப் பகுக்கும் பொது வரும் உறுப்புகளை v_{r+1} , v_r என்ற மூலையில் அமைக்கலாம். இவ்வனம் அமைப்பும் தொடர்களின் தொகைகளைக் காணும் வழியினை எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \text{ என்ற தொடரில் } S_n \text{ ஐயும் } S_{n+1} \text{ ஐயும் காண்க.}$$

$$\begin{aligned} \text{கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் } v_r &= \frac{1}{r(r+1)} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \end{aligned}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \quad \text{என்று எடுத்துக் கொள்.}$$

$$\therefore v_r = v_r - v_{r+1}$$

$$\therefore v_n = v_n - v_{n+1}$$

$$v_{n-1} = v_{n-1} - v_n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v_2 = v_2 - v_3$$

$$v_1 = v_1 - v_2$$

+

$$\text{கூட்டி, } S_n = v_1 - v_{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

$$\therefore \begin{cases} S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \\ S_\infty = 1 \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$\frac{8}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{8}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots$ என்ற தொடரின் S_n, S_∞ அறிக.

$$\begin{aligned} \text{கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் } u_n &= \frac{8n+1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

எனவே, $v_r = \frac{1}{r^2}$ எனக் கொண்டால்

$$u_r = v_r - v_{r+1}$$

$$\therefore u_n = v_n - v_{n+1}$$

$$u_{n+1} = v_{n+1} - v_{n+2}$$

$$+ \dots + \dots + \dots$$

$$u_n = v_n - v_{n+1}$$

$$u_1 = v_1 - v_2$$

$$\text{ஆகவே, } S_n = v_1 - v_{n+1}$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ S_{\infty} = 1 \end{array} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \frac{1}{6 \cdot 3!} + \dots$ என்ற தொடர்ச்சி S_n, S_{∞} காண்க.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(n+2)n!} = \frac{(n+1)}{(n+2)!} \\ &= \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \end{aligned}$$

எனவே $v_r = \frac{1}{(r+1)!}$ எனக் கொள்க.

$$\left[\therefore u_r = v_r - v_{r+1} \right]$$

எனவே $S_n = v_1 - v_{n+1}$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\therefore S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+2)!} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left[\begin{array}{l} S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \\ S_{\infty} = \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{2}{1.5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3.5} + \frac{1}{5^2} + \frac{4}{5.7} + \frac{1}{5^3} + \dots$$

மற்ற தொடரின் தொகை காண்க.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{1}{5} \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{5} \right)^n \cdot \left[\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \right] \\ &= \frac{2}{4} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2n-1} - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{2n-1} - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2n+1} \end{aligned}$$

எனவே

$$v_n = \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2n+1} \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$\therefore u_n = v_{n-1} - v_n$$

$$\therefore u_{n-1} = v_{n-2} - v_{n-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$u^2 = v_1 - v_2$$

$$u_1 = v_0 - v_1$$

$$\text{எனவே } S_n = v_0 - v_n$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{2n+1}$$

$$\therefore S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} S_n = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(1)^n}{2n+1} \right] \\ S_{\infty} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

5.4. ஐதக் II: இவ்வகை $u_n = (a+n-1b) (a+nb) (a+n+1b) \dots (a+n+r-1b)$ என்ற n ஆவது உறுப்பைக் கொண்ட தொடருக்கு அமைந்ததாகும்.

இது மூலக்கப் பண்புகளைக் கொண்டுள்ளதை எளிதில் ஆதீயலாம்.

1. ஒவ்வோருறுப்பும் r காரணிகளைக் கொண்டுள்ளது.

2. ஒவ்வோருறுப்பிலுள்ள r காரணிகளும் கூட்டுத் தொடர் முறையில் b ஐப் பொது வேறுபாடாகக் கொண்டவைத்துள்ளன.

3. உறுப்புகளின் முதல் காரணிகளான $a, a+b, a+2b, \dots$ என்பவை மேற்படதீய n ஐப் பொது வேறுபாடாகக் கொண்டு கூட்டுத் தொடர் முறையில் அமைந்துள்ளன.

எழி முறை:

$$u_n = u_n \cdot (a+n+r-1b) \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$\begin{aligned} \therefore u_{n+1} &= u_{n-1} \cdot (a+n+r-2b) \\ &= (a+n-2b) (a+n-1b) \dots (a+n+r-2b) \\ &= (a+n-2b) \cdot u_n \end{aligned}$$

$$\therefore u_n - u_{n-1} = u_n \{ (r+1) \cdot b \}.$$

எனவே

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= u_n (r+1) \cdot b \\ u_{n-1} - u_{n-2} &= u_{n-1} (r+1) \cdot b \\ \dots &\dots \dots \dots \\ u_2 - u_1 &= u_2 (r+1) \cdot b \\ u_1 - u_0 &= u_1 (r+1) \cdot b \end{aligned}$$

$$\text{கூட்டி} \quad u_n - u_0 = S_n (r+1) \cdot b$$

$$\therefore \boxed{S_n = \frac{r_n - r_0}{(r+1) \cdot b}} \quad (\text{தேவனீத் கொள்க.})$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

1.2.3+2.3.4+3.4.5+... என்ற தொடரின் S_n காண்க.

$$\text{என்று } u_n = n(n+1)(n+2)$$

எனவே கனக 11-ல் கூறப்பட்ட பண்புகளை இத்தொடர்த் ஒத்துக் கொண்டுள்ளது.

$$\therefore r_n = (n+2), u_n.$$

$$r_0 = 2, u_0 = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{என்று } r = 2, b = 1.$$

$$\therefore S_n = \frac{r_n - r_0}{(r+1)b} = \frac{r_n}{4 \cdot 1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$2.7.11.15 + 7.11.15.17 + 11.15.19.21 + \dots$$

என்ற தொடரின் S_n காண்க.

$$u_n = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+9).$$

$$4n+9 = (4n+11)-2 \text{ என்று எழுதுதலை நோக்குக.}$$

$$\therefore u_n = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) \\ - 2(4n-1)(4n+3)(4n+7).$$

$$= u_n^{(1)} - 2u_n^{(2)}$$

$$\text{என்று } u_n^{(1)} = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)$$

$$u_n^{(2)} = (n-1)(4n+3)(4n+7).$$

$$S_n^{(1)} = u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \dots + u_n^{(1)}$$

$$S_n^{(2)} = u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \dots + u_n^{(2)} \text{ என்றும் கொண்டால்}$$

$$S_n = S_n^{(1)} - 2S_n^{(2)}.$$

எனவே,

$$v_n^{(1)} = (4n+15) u_n^{(1)}$$

$$v_n^{(2)} = (4n+11) u_n^{(2)} \text{ என்று கொடுவோம்.}$$

$$S_n^{(1)} = \frac{v_n^{(1)} - v_0^{(1)}}{(r+1)b} = \frac{(4n+15)u_n^{(1)} - 15 \cdot u_0^{(1)}}{(4+1) \cdot 4}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{v_n^{(2)} - v_0^{(2)}}{(r+1)b} = \frac{(4n+11)u_n^{(2)} - 11 \cdot u_0^{(2)}}{(8+1) \cdot 4}$$

$$\therefore S_n^{(1)} = \frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)(4n+15) - 15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-1)}{20}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) - 11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-1)}{18}$$

$$\therefore S_n = (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) \left\{ \frac{4n+15}{20} - \frac{2}{18} \right\} \\ + \frac{15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3}{20} - \frac{2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3}{18}$$

$$= (4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) \frac{(18n+80-10)}{80}$$

$$+ \frac{(80-10)11 \cdot 7 \cdot 3}{50}$$

$$= \frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11)(8n+25)}{40}$$

$$+ \frac{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{8}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$1.5^2 + 5.9^2 + 9.13^2 + \dots$ என்ற தொடரின் S_n காண்க.

$$v_n = (4n-3)(4n+1)^2$$

$$= (4n-3)(4n+1)(4n+1)$$

$$= (4n-3)(4n+1)\{4n+5-4\}$$

$$= (4n-3)(4n+1)(4n+5) - 4(4n-3)(4n+1).$$

இ. எ. - 9

$$\begin{aligned}
\therefore S_2 &= \sum_{r=1}^n (4n-3)(4n+1)(4n+5) \\
&= 4 \sum_{r=1}^n (4n-3)(4n+1) \\
&= \frac{v_n(1) - v_0(1)}{(r+1)b} - 4 \frac{v_n(2) - v_0(2)}{(r+1)b} \\
&= \frac{v_n(1) - v_0(1)}{(2+1) \cdot 4} - 4 \cdot \frac{v_n(2) - v_0(2)}{(2+1) \cdot 4} \\
&= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)(4n+9) - (-3) \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9}{18} \\
&\quad - 4 \cdot \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5) - (-3) \cdot 1 \cdot 5}{18} \\
&= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)}{4} \cdot \left\{ \frac{4n+9}{4} - \frac{4}{3} \right\} \\
&\quad + \frac{3 \cdot 1 \cdot 5}{4} \left\{ \frac{9}{4} - \frac{1}{3} \right\} \\
&= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)(12n+11)}{48} + \frac{15}{4} \cdot \frac{28}{12} \\
&= \frac{(4n-3)(4n+1)(4n+5)(12n+11)}{48} + \frac{115}{16}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots$ இத் தொடரின் S_n காண்க.

$$u_n = n^4$$

$$= An(n+1)(n+2)(n+3) + Bn(n+1)(n+2)$$

$$Cn(n+1) + Dn + E$$

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
B &= -6 \\
C &= 7 \\
D &= -1 \\
E &= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) - 6n(n+1)(n+2) + 7n(n+1) - n + 0$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} \\ &= \frac{6n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{7n(n+1)(n+2)}{3} \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } S_n &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} \\ &= \frac{3}{2} n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{7}{3} n(n+1)(n+2) \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

5-5. எண் III : இயல்வகை

$$u_n = \frac{1}{\{a+(n-1)b\} \{a+nb\} \{a+(n+1)b\} \dots \{a+(n+r-2)b\}}$$

என்று அமைத்திருக்கும்.

$$v_n = \frac{1}{(a+nb) (a+n+1b) \dots (a+n+r-2b)}$$

$$\therefore v_n = (a+n-1b) \cdot u_n$$

$$\therefore v_{n-1} = (a+n-2b) \cdot u_{n-1}$$

$$= \frac{(a+n-2b)}{(a+n-2b) (a+n-1b) \dots (a+n+r-2b)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(a+n-1b) (a+nb) (a+n+r-2b)} \\ &\quad \times \frac{(a+n+r-2b)}{(a+n+r-2b)} \\ &= (a+n+r-2b) \cdot u_n \end{aligned}$$

எனவே,

$$v_{n-1} - v_n = (r-1) b \cdot n$$

$$\therefore v_{n-2} - v_{n-1} = (r-1) b \cdot n_{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$v_0 - v_1 = (r-1) b \cdot n_1$$

கூட்டி, நாம் பெறுவது,

$$v_0 - v_n = (r-1) b \cdot S_n$$

$$\therefore S_n = \frac{v_0 - v_n}{(r-1) \cdot b} \quad (\text{இதனைக் கூ.த.க.}).$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots \dots$ என்ற தொடரின் S_n , S_∞ அறிக.

$$\text{என்ற } u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

(இது வகை III-ல் அடங்குவது கவனிக்க.)

$$\text{எனவே } v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$v_{n-1} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= \frac{n - n - 3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{-3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = -3u_n \end{aligned}$$

$$\therefore v_n - v_{n-1} = -3u_n$$

$$v_{n-1} - v_{n-2} = -3u_{n-1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v_1 - v_0 = -3u_1$$

கூடுதல் கால்கள்

$$v_n - v_0 = -8, \quad S_{2n}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{8} \left[v_0 - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] \\ \therefore S_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{8} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right] \\ &= \frac{1}{128}. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots \dots$$

என்ப தொடரின் S_n, S_{∞} காண்க.

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

எனவே,

$$v_n = \frac{2}{n+1}; \quad b = 1, \quad r = 2.$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{v_0 - v_n}{b(r-1)} \\ &= \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \\ &= 2 - \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= 2. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$$\frac{1}{4} + \frac{1^2}{1^2} + \frac{1}{6} + \frac{1^2+2^2}{1^2+2^2} + \frac{1}{6} + \frac{1^2+2^2+3^2}{1^2+2^2+3^2} + \dots$$

என்ற தொடரில் S_n , S_{∞} ஆகியன.

$$\text{எனில் } u_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1^2+2^2+\dots+n^2}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \cdot n^2(n+1)^2} \cdot 4$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{(n+2)} + \frac{(2n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{(2n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$(2n+1)(n+2) = An(n+1) + Bn + C$$

$$= 2n(n+1) + 2n + 2.$$

$$\therefore u_n = \frac{2}{3} \left\{ \frac{2n(n+1) + 2n + 2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}$$

$$= \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right. \\ \left. + \frac{4}{3} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}$$

$$\therefore S_n = \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right\}$$

$$+ 2 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \right\} + 2$$

$$+ \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} + 2.$$

$$\left[\because S_n = \frac{T_n - T_1}{b(r-1)} \right]$$

$$S_{\infty} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{37}{6}.$$

5.6. கனம் IV :

$$\frac{a}{b} + \frac{a(a+x)}{b(b+x)} + \frac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)} + \dots$$

என்ற தொடரில் S_n காண்க.

$$\text{என்கு } u_n = \frac{a(a+x)(a+2x) \dots (a+n-1x)}{b(b+x)(b+2x) \dots (b+n-1x)} + \dots$$

என்பதில்,

$$v_n = \frac{a(a+x)(a+2x) \dots (a+n-1x)}{b(b+x)(b+2x) \dots (b+n-1x)} \times (a+nx)$$

எனக் கொள்கோம்.

$$\text{எனவே } v_n = u_n (a+nx).$$

$$\begin{aligned} \therefore v_{n-1} &= \frac{a(a+x) \dots (a+n-2x)}{b(b+x)(b+2x) \dots (b+n-2x)} (a+n-1x) \\ &= \frac{a(a+x) \dots (a+n-2x)(a+n-1x)}{b(b+x) \dots (b+n-2x)} \\ &= (b+n-1x) u_n. \end{aligned}$$

$$\therefore v_n - v_{n-1} = (a-b+x) u_n.$$

$$\text{எனவே } v_{n-1} - v_{n-2} = (a-b+x) u_{n-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ v_1 & - & v_0 = (a-b+x) u_1 \end{array}$$

$$\text{கூட்டி} \quad \underline{v_n - v_0 = (a-b+x) S_n.}$$

$$\therefore \boxed{S_n = \frac{v_n - v_0}{a-b+x}} \quad (\text{தேவையிற் கூ.க.})$$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$$\frac{8}{8} + \frac{8.5}{8.10} + \frac{8.5.7}{8.10.12} + \dots \text{ என்ற தொடரில் முதல்}$$

n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{8 \cdot 10 \cdot 12 \dots (2n+6)}$$

$$\therefore v_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{8 \cdot 10 \cdot 12 \dots (2n+6)} \cdot (2n+8)$$

$$v_{n-1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{8 \cdot 10 \cdot 12 \dots (2n+4)} \cdot (2n+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore v_n - v_{n-1} &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{8 \cdot 10 \cdot 12 \dots (2n+6)} [(2n+8) - (2n+6)] \\ &= (2n+8) u_n - (2n+1) u_{n-1} \\ &= (2n+8) u_n - (2n+6) u_n \\ &= -2 u_n. \end{aligned}$$

$$\therefore v_1 - v_0 = -2u_1$$

$$v_2 - v_1 = -2u_2$$

$$v_3 - v_2 = -2u_3$$

$$\dots$$

$$\therefore \underline{v_n - v_{n-1} = -2u_n}$$

$$\therefore v_n - v_0 = -2S_n$$

$$\therefore S_n = -\frac{v_n}{2} + \frac{v_0}{2}; \text{ இங்கு } v_0 = 2.$$

$$\therefore S_n = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1) (2n+8)}{8 \cdot 10 \cdot 12 \dots (2n+6)}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$$\sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3i-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3i} \text{ என்ற தொடரின் மூலம் } n$$

உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}$$

$$\therefore v_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n} (3n+3)$$

$$v_{n-1} = \frac{2.5.8 \dots (3n-4)}{3.6.9 \dots (3n-3)} \cdot (3n-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore v_n - v_{n-1} &= \frac{2.5.8 \dots (3n-1)}{3.6.9 \dots 3n} (3n+2) \\ &\quad - \frac{2.5.8 \dots (3n-4)}{3.6.9 \dots (3n-3)} (3n-1) \\ &= (3n+2) \cdot u_n - 3n \cdot u_n. \end{aligned}$$

$$\therefore v_n - v_{n-1} = 2u_n$$

$$v_1 - v_0 = 2u_1$$

$$v_2 - v_1 = 2u_2$$

$$v_3 - v_2 = 2u_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\underline{v_n - v_{n-1} = 2u_n.}$$

$$\therefore v_n - v_0 = 2(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n).$$

ஆகவே $v_0 = 2.$

$$\therefore v_n - 2 = 2 S_n.$$

$$\therefore 2 S_n = v_n - 2.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} v_n - 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2.5.8 \dots (3n-1)(3n+2)}{3.6.9 \dots \dots \dots 3n} - 1 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\frac{2}{8} + \frac{2.6}{8.7} + \frac{2.6.10}{8.7.11} + \dots$ என்ற தொடரின் மூன்றாம் உறுப்பின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

$$u_n = \frac{2.6.10 \dots (4n-2)}{8.7.11 \dots (4n-1)}$$

$$v_n = \frac{2.6.10 \dots (4n-2)}{8.7.11 \dots (4n-1)} \times (4n+2)$$

$$v_{n-1} = \frac{2.8.10 \dots (4n-8)}{8.7.11 \dots (4n-5)} \times (4n-2)$$

$$\begin{aligned}\therefore v_n - v_{n-1} &= (4n+2) u_n - (4n-2) u_{n-1} \\ &= (4n+2) v_n - (4n-1) u_n \\ &= u_n [4n+2-4n+1] \\ &= 3 \cdot u_n.\end{aligned}$$

$$\therefore v_1 - v_0 = 3u_1$$

$$v_2 - v_1 = 3u_2$$

$$v_3 - v_2 = 3u_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v_n - v_{n-1} = 3u_n$$

$$\therefore v_n - v_0 = 3 \sum v_n = 3 S_n. \quad \text{இங்கு } v_0 = 2.$$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \frac{1}{3} (v_n - v_0) \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{2.8.10 \dots (4n+2)}{8.7.11 \dots (4n-1)} - 2 \right]\end{aligned}$$

பயிற்சி 5 (a)

பின்வரும் தொடர்களின் ஒர்தல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும் முடியுமானால் கீழ்க்கீழ் கூட்டுத் தொகையும் காண்க :

$$1. \quad \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots$$

$$2. \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{18} + \frac{3}{4} + \dots$$

$$3. \quad \frac{6}{1.8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{2.8} \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{8}{3.4} \cdot \frac{1}{8^3} + \dots$$

$$4. \quad \frac{1}{2.8} + \frac{1}{8.4} + \frac{1}{4.6} + \dots$$

$$5. 1 \left(\frac{1}{1} \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \right) + 3 \left(\frac{1}{3} \right) + \dots$$

$$6. \frac{1}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{(1+2x)(1+3x)} \\ + \frac{1}{(1+3x)(1+4x)} + \dots$$

$$7. \frac{1}{x(x+a)} + \frac{1}{(x+a)(x+2a)} + \frac{1}{(x+2a)(x+3a)} + \dots$$

$$8. \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \frac{4}{1.2.3.4.5} + \dots$$

$$9. \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(x+2)} + \frac{3x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

மீள்வரும் தொடர்களின் மூலம் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$II. 1. 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \dots$$

$$2. 1.2.4^2 + 2.3.5^2 + 3.4.6^2 + \dots$$

$$3. 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + \dots$$

$$4. 4.7.10 + 7.10.13 + 10.13.16 + \dots$$

$$5. 1.2.3 + 2.3.5 + 3.4.7 + 4.5.9 + \dots$$

$$6. 2.7.11 + 7.11.15 + 11.15.19 + \dots$$

$$7. 1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \dots$$

$$8. 1.1^2 + 2(1^2+2^2) + 3(1^2+2^2+3^2) + \dots$$

$$9. 1.2.4 + 4.5.6 + 7.7.8 + 10.9.7 + \dots$$

III. மீள்வரும் தொடர்களின் மூலம் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையும், சுத்தழித் கூட்டுத் தொகையும் காண்க :

$$1. \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots$$

$$2. \frac{4}{2.3.4} + \frac{7}{3.4.5} + \frac{10}{4.5.6} + \dots$$

$$3. \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.6} + \dots$$

$$4. \frac{1}{1.3.7} + \frac{1}{3.5.9} + \frac{1}{5.7.11} + \dots$$

$$5. \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.8} + \frac{1}{3.6} + \dots$$

$$6. \frac{4}{2.3.5} + \frac{7}{3.4.8} + \frac{10}{4.5.7} + \dots$$

$$7. \frac{1}{1.3.4} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{5}{3.5.6} + \dots \infty$$

$$8. \frac{11}{1.4.8} + \frac{12}{2.5.7} + \frac{13}{3.6.9} + \dots \infty$$

$$9. \frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \dots$$

$$10. \frac{2}{1.4.6} + \frac{3}{2.5.8} + \frac{4}{3.6.7} + \dots$$

IV. 1. $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$ கூறுபுகள்.

$$2. \frac{11}{14} + \frac{11.13}{14.16} + \frac{11.13.15}{14.16.18} + \dots \infty$$

$$3. \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \dots \infty$$

$$4. \frac{4}{6} + \frac{4.7}{6.8} + \frac{4.7.10}{6.8.11} + \dots$$
 கூறுபுகள்

$$5. \frac{2}{4} + \frac{2.5}{4.7} + \frac{2.5.8}{4.7.10} + \dots \quad ..$$

$$6. \frac{1}{4} + \frac{1.2}{4.6} + \frac{1.2.3}{4.6.8} + \dots \quad ..$$

5.7. கூறுபடுகள் வழிக் கூட்டுத்தொகை காணல்

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ என்ற தொடர் முடிவற்றது எனில் அதன் கூறுபடுகள்

$$v_n = u_{n+1} - u_n \text{ என்க.}$$

எனவே நமக்கு,

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n + \dots \text{ என்ற தொடர் மூன்ற கிடைக்கின்றது.}$$

5.8. இதை, முதல் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் மூன்ற என்ற கூறுபொம். இத்தொடர் மூன்றயில் இருந்து $r_1 - r_1, r_2 - r_1, \dots, r_{n+1} - r_n, \dots$ என்ற தொடர் மூன்றயினை அறிவலாம். இது $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ என்ற தொடர் மூன்றயின் முதல் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் மூன்றயாகும்; ஆனால், $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots$ என்ற தொடர் மூன்றயின் இரண்டாம் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் மூன்ற என்பதை எளிதில் உணரலாம். இதுபோல் $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ என்ற தொடர்மூன்றயின் மூன்றாம், நான்காம் \dots வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் மூன்றகளைக் கண்டறிவலாம்.

தொகைகள் காண, தொடர்களின் அமைப்பு மீதி கொடுக்கப் படாமல், அதன் முதல் உறுப்புகளில் சிலவற்றைக் கொடுத்திருத் தால் வேறுபாட்டு வரிசைத் தொடர் மூன்றகளைப் பயன் படுத்தலாம். இவ்வழியினை எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் கொண்டு தனக்கு அறித்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$9 + 22 + 168 + 498 + \dots$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பினைவும், S_n ஐவும் அறிக.

முதற்கண் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் அமைப்பு மீதி யதற்துள்ளனமையை நோக்குதல் வேண்டும். கீழ்க்கண்ட மூன்றப்பட்ட உறுப்புகளை எழுதி வேறுபாடுகளைக் காண்போம்.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
9	22	69	168	498
r_1	r^2	r_3	r_4
18	87	109	395 (முதற்கொடர் மூன்ற)			
w_1	w_2	w_3				
24	72	216	...	(இரண்டாம் தொடர் மூன்ற)		

இரண்டாம் தொடர் மூன்ற ஒரு பெருக்குத் தொடர் மூன்ற என்பதை அறிவலாம்.

$$\text{ஆனால், } w_n = r_{n+1} - r_n$$

$$\therefore v_{n-1} = v_n - v_{n-1}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$v_2 = v_3 - v_2$$

$$v_1 = v_2 - v_1$$

$$\text{கூடுதல் கண்டிதம் } v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = v_n - v_1$$

$$\text{அதாவது } 24 + 72 + 216 + \dots (n-1) \text{ கூறுக்கள்} = v_n - v_1$$

$$\therefore 24 \cdot \frac{(3^{n-1}-1)}{3-1} = v_n - v_1$$

$$(i.e) 12 (3^{n-1}-1) = v_n - v_1$$

$$\therefore v_n = v_1 + 12 (3^{n-1}-1) = 12 + 12 \cdot 3^{n-1} - 12 \\ = 12 \cdot 3^{n-1} + 1$$

$$\text{இனி } v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

$$\text{கூடுதல் கண்டிதம் } v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_1$$

$$\text{அதாவது } 12 \cdot 1 + 1 = u_2 - u_1$$

$$12 \cdot 3 + 1 = u_3 - u_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$12 \cdot 3^{n-2} + 1 = u_n - u_{n-1}$$

$$\text{கூடுதல் கண்டிதம் } 12 (1+3+\dots+3^{n-2}) + (n-1) = u_n - u_1$$

$$\text{அதாவது } 12 \cdot 1 \cdot \frac{(3^{n-1}-1)}{3-1} + n-1 = u_n - u_1$$

$$\therefore u_n = u_1 + 6 \cdot 2^{n-1} = 6 + n - 1 = 2 \cdot 2^n + \overline{n-1} + 3 \\ = 2 \cdot 2^n + n + 2$$

$$\therefore S_n = 2[8 + 2^2 + \dots + 2^n] + \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{(2^{n+1} - 1)}{2 - 1} + \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\ = 2^n + \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 2.$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$6 + 9 + 14 + 23 + 40 + \dots$ இத்தொடரின் n ஆவது உறுப் பினையும், S_n ஐயும் கண்டுபிடிக்க.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
6	9	14	23	40
r_1	r_2	r_3	r_4	= (முதல் வேறுபாடுகள்)		
3	5	9	17			
w_1	w_2	w_3	... (இரண்டாம் வேறுபாடுகள்)			
3	4	8				

இரண்டாம் வேறுபாடுகள் ஒரு பெருக்குத் தொடர் மூலையாகும்.

$$\text{என்கு } w_1 = r_2 - r_1$$

$$w_2 = r_3 - r_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_{n-1} = r_n - r_{n-1}$$

$$\text{உடுதல் கண்டால் } w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} = r_n - r_1$$

$$\text{அதாவது } 3 + 4 + 8 + \dots + (n-1) \text{ உறுப்புகள்} = r_n - r_1$$

$$\text{அதாவது } 2 \cdot \frac{(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = r_n - r_1$$

$$\text{எனவே } r_n = r_1 + 2^n - 2 = 6 + 2^n - 2 \\ = 2^n + 4$$

$$\text{இனி } r_1 = 2 + 1 = u_2 - u_1$$

$$r_2 = 2^2 + 1 = u_3 - u_2$$

$$r_3 = 2^3 + 1 = u_4 - u_3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$r_{n-1} = 2^{n-1} + 1 = u_n - u_{n-1}$$

கூடுதல் காண $2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + (n-1) + u_n - u_1$

$$\text{அதாவது } 2 + \frac{(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} + n - 1 = u_n - u_1$$

$$\therefore u_n = u_1 + 2^2 - 2 + n - 1 = 6 + 2^2 + n - 3 = 2^2 + n + 3.$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= (2 + 2^2 + \dots + 2^n) + \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= 2^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n - 2. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$4 + 14 + 30 + 52 + 80 + 114 + \dots$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பினையும், S_n ஐயும் காண்க.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	...
4	14	30	52	80	114	...

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
10	16	22	28	34

(முதல் வேறுபாடுகள்)

முதல் வேறுபாடுகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையில் அமைந்துள்ளனவையே நோக்குக.

$$r_1 = u_2 - u_1$$

$$r_2 = u_3 - u_2$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$r_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

$$\text{கூட்டம் } r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} = u_n - u_1$$

$$\text{அதாவது } 10 + 18 + 26 + \dots (n-1) \text{ கூறுக்கள்} = u_n - u_1$$

$$\therefore u_n - u_1 = \frac{n-1}{2} \cdot \{20 + (n-2) \cdot 8\}$$

$$\therefore u_n = 4 + \frac{n-1}{2} \cdot \{20 + 8n - 16\}$$

$$= 4 + \frac{n-1}{2} \cdot (8n + 4)$$

$$= 4 + (n-1)(4n+2) = 2n^2 + n$$

$$S_n = 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$= 2 \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$8+4+2+8+28+68+184 + \dots$ — இத்தொடரின் u_n இயும், S_n இயும் காண்க.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	...
8	4	2	8	28	68	184	...

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	
-4	-2	6	20	40	68	...

(முதல் வேற்றுமைகள்)

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
8	8	14	20	28	...

(இரண்டாம் வேற்றுமைகள்)

இரண்டாம் வேற்றுமைகள் ஒரு கூட்டுத்தொகை முறையில் அமைந்துள்ள மையை நோக்குக.

இ. க.—10

$$\text{எனவே } r_1 = u_2 - u_1$$

$$r_2 = u_3 - u_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

$$\text{கூட்டி } r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} = u_n - u_1$$

$$\text{அதாவது } 2 + 3 + \dots (n-1) \text{ உறுப்புகள்} = u_n - u_1$$

$$\therefore u_n = u_1 + \frac{n-1}{2} \{ 4 + (n-2) \cdot 3 \}$$

$$= u_1 + \frac{n-1}{2} (3n-2)$$

$$= 3 + (n-1)(3n-4)$$

$$= 3n^2 - 7n + 12.$$

$$S_n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{7n(n+1)}{2} + 12n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{7n(n+1)}{2} + 12n.$$

எடுத்துக்காட்டு 19:

$$\frac{4}{1!} + \frac{11}{2!} + \frac{28}{3!} + \frac{37}{4!} + \frac{56}{5!} + \dots = 6e - 1 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

4 11 28 37 56 ... என்ற தொடர் மூன்றாவது காரணிக்.

இத் தொடர் மூன்றாவது முதல் வேற்றமை வரிசையிலாகக் காண்போம்.

இது 7 11 15 19 ... என்று இருக்கும்.

இத் தொடர் மூன்றாம் ஒரு கூட்டுத் தொடர் மூன்றாவது இரண்டாம் படித அறிக.

எனவே,

$$\begin{array}{rcl}
 r_1 & = & u_2 - u_1 \\
 r_2 & = & u_3 - u_2 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 r_{n-1} & = & u_n - u_{n-1} \\
 \hline
 r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} & = & u_n - u_1
 \end{array}$$

அதாவது,

$$7 + 11 + \dots + (n-1) \text{ உறுப்புகள்} = u_n - 4.$$

$$\therefore u_n = 4 + \frac{n-1}{2} (14 + n - 5 \cdot 4)$$

$$= 4 + \frac{n-1}{2} (14 + 4n - 20)$$

$$= 4 + (n-1) (2n+3)$$

$$= 2n^2 + n + 1$$

$$\therefore t_n \left\{ \begin{array}{l} \text{தொடரின்} \\ n\text{-ஆவது உறுப்பு} \end{array} \right\} = \frac{2n^2 + n + 1}{n!}$$

$2n^2 + n + 1 = An(n-1) + Bn + C$ என்று வைப்போம்.

$$= 2n(n-1) + 3n + 1$$

$$\therefore t_n = \frac{2n(n-1) + 3n + 1}{n!}$$

$$= \frac{2}{(n-2)!} + \frac{3}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{தொடரின் கூட்டுத் தொகை} &= 2e + 3e + e - 1 \\
 &= 6e - 1.
 \end{aligned}$$

5-9. மடங்கு வரும் தொடர்கள் :

இதன்மூலம் : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r + \dots$ என்ற தொடரில் தொடர்ந்தாற்போல அடுத்தடுத்து வரும் $(r+1)$ சொற்கள்,

$a_n + p_1 \cdot a_{n-1} + p_2 \cdot a_{n-2} + \dots + p_r \cdot a_{n-r} = 0$ என்ற ஒரு படித் தொடர்பை $n > r$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் பெற்றிருந்தால் அத் தொடரின் r வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடர் (recurring series of the r th order) எனக் கூறுவோம். மேலும் $1 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_rx^r$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைவரின் அளவுத் திட்டத் தொடர்பு (scale of relation) எனக் கூறுவோம்.

ஒரு r வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடரின் அத்தொடரின் முதல் $2r$ உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் நிச்சயிக்கலாம் :

$$\text{தொடரின் } a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2r-1}x^{2r-1} + \dots$$

என்று குறிப்போம். இது r வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடராய் இருத்தவாய்,

$1 + p_1x + \dots + p_rx^r$ என்பது இதன் அளவுச் சட்டமாயும், இத் தொடரின் ஒவ்வொரு $(r+1)$ அடுத்தடுத்த கெடுக்கள்

$$a_n + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \dots + p_r a_{n-r} = 0 ; n > r$$

என்ற ஒருபடித் தொடரின் ஏற்கின்றன. எனவே,

$$\begin{array}{ccccccc} a_r & + & p_1 a_{r-1} & + & p_2 a_{r-2} & + & \dots + p_r a_0 & = & 0 \\ a_{r+1} & + & p_1 a_r & + & p_2 a_{r-1} & + & \dots + p_r a_1 & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{2r-1} & + & p_1 a_{2r-2} & + & p_2 a_{2r-3} & + & \dots + p_r a_{r-1} & = & 0 \end{array}$$

மேற்கூறும் r ஒருபடிச் சமன்பாடுகளில் p_1, p_2, \dots, p_r ஆகியவைகளின் தீர்வுகளைக் காணலாம். எனவே,

$a_n + p_1 a_{n-1} + \dots + p_r a_{n-r} = 0 ; n > 0$ என்ற ஒருபடித் தொடர்பு கிடைக்கின்றது. இத் தொடர்பினால் a_1, a_2, a_3, \dots ஆகியவைகளைக் காணலாம்.

5-19. மடங்கி வரும் தொடர்களின் தொகை காணல் :

எடுத்துக்காட்டாக நாம் 2 வரிசை ஏற்ற மடங்கி வரும் தொடரின் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ என்று அத்தொடரை எழுதுவோம்.

இதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $1 + px + qx^2$ என்று இருக்கும்.

மேலும் $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$; $n \geq 2$ என்று ஒவ்வொரு n அடுத்தடுத்து வரும் கெழுக்கள் அமைந்து இருக்கும்.

$$S = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \text{ என்க.}$$

$$\therefore px \cdot S = a_1px + a_2px^2 + a_3px^3 + a_4px^4 + \dots$$

$$qx^2 \cdot S = a_2qx^2 + a_3qx^3 + a_4qx^4 + a_5qx^5 + \dots$$

$$\therefore (1 + px + qx^2) S = a_0 + (a_1 + pa_0)x + (a_2 + pa_1 + qa_0)x^2 + (a_3 + pa_2 + qa_1)x^3 + \dots$$

ஆனால்

$$a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0; \quad n \geq 2.$$

எனவே

$$(1 + px + qx^2) S = a_0 + (a_1 + pa_0)x.$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)x}{1 + px + qx^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$2 + 5x + 13x^2 + 25x^3 + \dots$ என்ற மடங்குத் தொடரின் திறப்பிக்கும் சாசனமும் (Generating function), n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க. (செ.ப.)

நாம் n உறுப்புகள் கொடுத்திருப்பதால், அதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பை $1 + px + qx^2$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$(2 + 5x + 13x^2 + 25x^3 + \dots)(1 + px + qx^2)$$

$$= 2 + x(2p + 5) + x^2(13 + 5p + 2q) + x^3(25 + 13p + 5q) + \dots$$

$$\therefore 13 + 5p + 2q = 0.$$

$25 + 13p + 5q = 0$. இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து $p = -5$, $q = +6$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \text{அளவுத் திட்டத் தொட்பு} = 1 - 5x + 5x^2.$$

$$\therefore 2 + 5x + 12x^2 + 25x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{2+x(2p+5)}{1+px+qx^2} \\ &= \frac{2-5x}{1-5x+5x^2} \\ &= \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} \\ &= (1-2x)^{-1} + (1-3x)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 + 5x + 12x^2 + 25x^3 + \dots \\ &= [1 + (2x) + (2x)^2 + \dots + (2x)^n + \dots] \\ &+ [1 + (3x) + (3x)^2 + \dots + (3x)^n + \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n \text{ ஆவது உறுப்பு} &= (2^{n-1} + 3^{n-1}) x^{n-1} \\ \therefore I_n &= (2^{n-1} + 3^{n-1}) x^{n-1} \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{முதல் } n \text{ கெழுக்களின்} \\ \text{கூட்டுத் தொகை} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n I_n = \sum_{n=1}^n (2^{n-1} + 3^{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n 2^{n-1} + \sum_{i=1}^n 3^{n-1}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} + \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

$$= 2^n - 1 + 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

$$= 2^n + 3^{n-1} - \frac{3}{2}$$

$$\text{பிறப்பிக்கும் சார்பு} = \frac{2-5x}{1-5x+5x^2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

$1 + 5x + 24x^2 + 64x^3 + \dots$ என்ற மடங்குத் தொடரின் பிறப்பிக்கும் சார்பையும், n ஆவது உறுப்பையும், முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க. (செ.ப.)

நாம் கு உறுப்புகள் கொடுத்திருப்பதால் அதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்வை $1 + px + qx^2$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\begin{aligned} \therefore (1 + 6x + 24x^2 + 84x^3 + \dots)(1 + px + qx^2) \\ = 1 + x(p + 6) + x^2(q + 6p + 24) + x^3(6q + 24p + 84) \\ + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore 24 + 6p + q = 0.$$

$$84 + 24p + 6q = 0.$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டால் $p = -5$, $q = 6$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \text{அளவுத் திட்டத் தொடர்வு} = 1 - 5x + 6x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{பிற்படுத்தும் சார்பு} &= \frac{1 + x(p + 6)}{1 + px + qx^2} \\ &= \frac{1 + x}{1 - 5x + 6x^2} \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (1 + 6x + 24x^2 + 84x^3 + \dots) &= \\ &= \frac{1 + x}{1 - 5x + 6x^2} \\ &= \frac{4}{1 - 3x} - \frac{3}{1 - 2x} \\ &= 4(1 - 3x)^{-1} - 3(1 - 2x)^{-1} \\ &= 4[1 + (3x) + (3x)^2 + \dots + (3x)^n + \dots] \\ &\quad - 3[1 + (2x) + (2x)^2 + \dots + (2x)^n + \dots] \end{aligned}$$

$$\therefore n \text{ ஆவது உறுப்பு } t_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} \cdot x^{n-1}$$

$$\begin{aligned} S_n = \left. \begin{array}{l} n \text{ சொட்டுகளின்} \\ \text{கூடுதல்} \end{array} \right\} &= 4 \sum_{1}^n 3^{n-1} - 3 \sum_{1}^n 2^{n-1} \\ &= 4 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2 \cdot 3^n - 2 - 3 \cdot 2^n + 3 \\ &= [2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n + 1]. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 22 :

$4 + x + 7x^2 - 5x^3 + \dots$ என்ற மடங்குத் தொடரின் சிறப்புத் திக்கும் சார்பையும், n ஆவது உறுப்பையும், முதல் n கெழுக்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க. (செ. ப.)

தாக்கு உறுப்புகள் கொடுத்திருப்பதால் அதன் அளவுத் திட்டத் தொடர்பு $1 + px + qx^2$ என எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$\begin{aligned}(4 + x + 7x^2 - 5x^3 + \dots)(1 + px + qx^2) \\ = 4 + x(1 + 4p) + x^2(7 + p + 4q) \\ + x^3(-5 + 7p + q) + \dots\end{aligned}$$

$$\therefore 7 + p + 4q = 0$$

$$-5 + 7p + q = 0$$

இயற்கு சமன்பாடுகளைத் தீர்வு கண்டால்,

$$q = -2, \quad p = 1$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\therefore \text{அளவுத் திட்டத் தொடர்பு} = 1 + x - 2x^2.$$

$$\begin{aligned}\text{சிறப்பிக்கும் சார்பு} &= \frac{4 + x(1 + 4p)}{1 + px + qx^2} \\ &= \frac{4 + 5x}{1 + x - 2x^2} \text{ ஆகும்.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (4 + x + 7x^2 - 5x^3 \dots) \\ &= \frac{4+5x}{1+x-2x^2} \\ &= \frac{4+5x}{(1-x)(1+2x)} \\ &= \frac{1}{1+2x} + \frac{3}{1-x} \\ &= (1+2x)^{-1} + 3(1-x)^{-1} \\ &= [1-2x + (2x)^2 + \dots + (-2x)^n + \dots] \\ &\quad + 3[1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots]\end{aligned}$$

$$n \text{ ஆவது உறுப்பு } t_n = (-2)^{n-1} x^{n-1} + 3 \cdot x^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
 S_n = \text{முதல் } n \text{ கெழுக்களின் கூடுதல்} &= \sum_{i=1}^n (-2)^{i-1} + 3 \cdot 2 \\
 &= \frac{1 - (-2)^n}{1 + 2} + 6 \\
 &= \frac{1 - (-2)^n}{3} + 6
 \end{aligned}$$

பயிற்சி 5 (b)

I. கீழ்க்கண்ட தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

1. $8 + 26 + 64 + 98 + 140 + \dots$
2. $8 + 5 + 9 + 17 + 28 + \dots$
3. $8 + 11 + 16 + 25 + 40 + \dots$
4. $10 + 28 + 80 + 168 + 404 + \dots$
5. $6 + 8 + 2 + 8 + 6 + 11 + \dots$
6. $4 + 10 + 20 + 35 + 55 + 84 + 120 + \dots$
7. $1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + \dots$
8. $7 + 10 + 14 + 20 + 30 + 45 + 68 + \dots$
9. $2 + 5 + 12 + 31 + 66 + 249 + \dots$

II. கீழ்க்கண்ட மடங்குத் தொடரின் கீழ்க்கீழ்க் சாசனையும் n ஆவது உறுப்பையும் காண்க :

1. $8 + 4x + 10x^2 + 18x^3 + \dots$
2. $1 + 5x + 9x^2 + 13x^3 + \dots$
3. $2 + 8x + 6x^2 + 9x^3 + \dots$
4. $8 + 6x + 14x^2 + 36x^3 + 98x^4 + 276x^5 + \dots$
5. $6 + 5x + 28x^2 - x^3 + 181x^4 - 146x^5 + \dots$

III. $6x + 80x^2 + 186x^3 + 808x^4 + \dots$ என்ற மடங்குத் தொடரிக் கெழுக்களின் n ஆவது உறுப்பையும் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

வினாக்கள்

பயிற்சி 1

1. $\frac{9}{x-2} - \frac{7}{x-1}$ 2. $\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2}$
3. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ 4. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-3}$
5. $\frac{1}{8(x-1)} + \frac{9}{14(2x+1)} - \frac{8}{9(x+2)}$
6. $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - 2 \cdot \frac{1}{x+2}$
 $+ \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{x+3}$
7. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{x-3}$
8. $\frac{1}{28} - \frac{1}{2(1+2x)} + \frac{1}{8(1+3x)}$
9. $-\frac{28}{4} \cdot \frac{1}{(x-3)} - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)} - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$
10. $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{8(1-x)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$
 $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$
11. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(x+2)}$
12. $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{4(1+x)} + \frac{4}{8(1-2x)}$
13. $\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$
14. $-\frac{6}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{2}{(1-2x)}$
15. $\frac{-2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-2)}$

$$16. \frac{-2}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^4}$$

$$17. -\frac{15}{16} + \frac{47}{16} \cdot \frac{1}{(4x-1)} + \frac{185}{16} \cdot \frac{1}{(4x-1)^2} \\ + \frac{25}{16} \cdot \frac{1}{(4x-1)^3}$$

$$18. \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x-1}{2(1+x^2)}$$

$$19. \frac{1}{100(x-3)} - \frac{x+3}{100(x^2+1)} - \frac{x+3}{10(x^2+1)^2}$$

$$20. \frac{2}{3(x-1)} - \frac{3x-1}{2(x^2+1)}$$

$$21. \frac{4}{3(x+1)} + \frac{11x-12}{3(x^2-2x+3)}$$

$$22. \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-3}{x^2+1}$$

$$23. \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

$$24. \frac{x-2}{x^2+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3}$$

$$25. \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3x}{(x^2-x+1)^2}$$

$$26. -1 + \frac{2}{3} \left[\frac{x-1}{2-x^2} + \frac{x-2}{4+x^2} \right]$$

$$27. a=1, b=-10, c=25$$

$$28. \frac{4}{1-2x} - \frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$29. A=3, B=1, C=1$$

$$30. A=0, B=2, C=-11$$

$$31. a=0, b=0, c=1, d=2.$$

பயிற்சி 2 (a)

(2) 7ஆவது உறுப்பு, (3) 15ஆவது உறுப்பு, (4) 11ஆவது உறுப்பு, (5) 11ஆவது உறுப்பு, (7) 8, 9ஆவது உறுப்புகள்.

(8) 5ஆவது உறுப்பு, (9) $\frac{7}{2}$, (10) $4\sqrt{2}-2$, (11) $2\sqrt{2}-1$

(12) $\frac{11}{8}$, (13) $\frac{1}{24}$, (14) $2\sqrt{2}$, (15) $2\frac{1}{2}-1$, (16) $\sqrt{2}-1$

(17) $\frac{1}{2}$, (18) $\frac{1}{2}$, (19) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, (20) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(21) $2\sqrt{2}-2$, (22) $\sqrt{2}-\frac{2}{2}$, (23) $\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right)$

(24) $\frac{1}{2}$, (25) $(4\frac{1}{2}-1)$, (26) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

பயிற்சி 2 (b)

$$1. (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \quad 2. \left(\frac{2^{n+2} - 2^{n+1} + 1}{2} \right)$$

$$3. 2^n + n; \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

$$4. (-1)^n \frac{1}{4} \left[8n - 7 + \frac{8}{2^{n+1}} - \frac{11}{2^{n+1}} \right]$$

$$5. (-1)^{n+1} + \frac{[(-1)^n - 1]}{2^{n+1}}; \quad |x| < 1$$

$$6. \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{7}{2^{n+1}} \right); \quad |x| < 2.$$

$$7. (-1)^n \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$8. \frac{1}{2^7} \left[-18n^2 - 57n - 40 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right]$$

$$9. a = b = \frac{4}{5}; \quad \frac{n+1}{5} \left[4 + \left(-\frac{3}{5} \right)^n \right]$$

$$10. a = \pm 1 \quad b = \pm \frac{1}{2}.$$

பயிற்சி 2 (c)

$$2. \quad \frac{n}{8} (n+1) (n+2).$$

பயிற்சி 3

1. $(x+1)e^x$
2. $(x^2+4x+2)e^x$
3. $(x^2+7x+8)e^x$
4. $2(x^2-3x+3)e^x + [x^3-6] + 2x^2$
5. $(x^3+6x^2+7x+1)e^x$
6. $\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}) + 2$
7. $(2x^4-7x+8)e^{-x}$
8. $(x+4x+2)e^x$
9. $(x+1)^x e^x - 1$
10. $(x^2+3x)e^x$
11. $3e-1$
12. $e+1$
13. $\frac{3}{e}$
14. $e+2$
15. $5e-2$
16. $e-2$
17. $7e-18$
18. $2\sqrt{e}$
19. $-\frac{1}{e}$
20. $5e$
21. $\frac{8e}{2}$
22. $2e - \frac{7}{2}$
23. $2e-4$
24. $\frac{1}{2} e(e^2-1)$
25. $\frac{3e}{2} - \frac{1}{e}$
26. $2e-1$
27. $2 - \frac{5}{4e}$
28. $\frac{1}{e} \left(e^4 - \frac{1}{e^4} \right)$
29. 4
30. $12e-1$
31. $4e-2$
32. $\left(e - \frac{2}{e} \right)^2$
33. $e - \frac{5}{2}$
34. $\frac{17e}{8}$
35. $-\frac{1}{e}$
36. $6e+2$

37. $e + 2$

38. $\frac{e^2 - e}{e - 1}$

39. (a) $\frac{(1-n)e}{|n|}$ (b) $2^{n-1} \frac{(8n^2 + n + 4)}{|n|}$

(c) $(-1)^n \frac{(1+n-3n^2)}{|n|}$

(d) $(-1)^n \frac{2^{n-1}(4-3n)}{|n|}$

(e) $e^n \cdot \frac{b^n}{|n|}$

(f) $(-1)^n \frac{2^{n-1}(9-2n)}{|n|}$

40. $\frac{8(n-1)}{|n|}$

பாட்ப்ப 4 (b)

1. $\frac{5}{2} - 3 \log 2$

2. $\frac{3}{4} - \log 2$

3. $2 \log 2 - 1$

4. $2 \log 2 - \frac{5}{4}$

5. $3 \log_2 2 - 1$

6. $\frac{1}{8} \log 2 - \frac{1}{12}$

7. $\left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \log(1-x) - \frac{1}{6} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$

8. $-243 \cdot \log \frac{9}{10} - 25$

9. $2 - \log_2 3$

10. $9 \log 2 - 12 \log 3$

11. $\frac{1}{4} \left[2 + \frac{x^2-1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right]$

12. $\frac{x}{1-x} + \log(1-x)$

பயிற்சி 5 (a)

I. 1. $\frac{n}{3n+1} : \frac{1}{3}$

2. $1 - \frac{1}{n+1} : 1$

3. $1 - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{3^n} : 1$

4. $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} : \frac{1}{2}$

5. $\frac{n+1}{n+1} = 1$

6. $\frac{n}{(1+x)(1+n+1x)}$

7. $\frac{n}{x(x+na)}$

8. $\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \right] : \frac{1}{2}$

9. $1 - \frac{x^n}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)}$

II. 1. $n(12n^4 + 120n^3 + 280n^2 + 180n - 71)/5$

2. $n(n+1)(n+2)(12n^3 + 99n + 209)/80$

3. $\frac{1}{6} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

4. $\frac{1}{12} [(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10) - 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10]$

5. $-\frac{1}{2} n(n+1)^2(n+2)$

6. $\frac{(4n-1)(4n+3)(4n+7)(4n+11) + 3 \cdot 7 \cdot 11}{12}$

7. $\frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$

8. $n(n+1)(n+2) - \frac{3}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) + \frac{1}{8} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$$2. \quad \frac{3}{2} n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{2} n(n+1)(n+2) \\ - 3n(n+1) - 6n$$

$$\text{III. } 1. \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{4}$$

$$2. \quad \frac{5}{6} - \frac{3n+5}{(n+2)(n+3)} + \frac{5}{6}$$

$$3. \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} + \frac{3}{4}$$

$$4. \quad \frac{11}{180} - \frac{1}{18} \frac{6n+11}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \frac{11}{180}$$

$$5. \quad \frac{11}{18} - \frac{1}{8} \frac{8n^2+12n+11}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{11}{18}$$

$$6. \quad \frac{53}{72} - \frac{1}{6} \frac{18n^2+22n+103}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \frac{53}{72}$$

$$7. \quad \frac{19}{88} \qquad 8. \quad \frac{359}{880}$$

$$9. \quad \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \frac{1}{(2n+1)(2n+4)} + \frac{1}{24}$$

$$10. \quad \frac{49}{144} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \\ + \frac{1}{3(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)} \\ - \frac{1}{n+4} + \frac{49}{144}$$

$$\text{IV. } 1. \quad \frac{(3.5.7 \dots 2n+1)}{2.4.6 \dots 2n} = 1$$

$$2. \quad 11$$

$$3. \quad 1$$

$$4. \quad \frac{4.7.10 \dots (3n+4)}{2.5.8 \dots (3n+2)} = 2$$

$$5. \frac{2.5.8 \dots (3n+2)}{4.7.10 \dots (3n+1)} = 2$$

$$6. \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2.3.4 \dots n(n+1)}{4.5.6 \dots (n+2)(n+3)} \right]$$

பயிற்சி 5 (b)

I. 1. $5n^2+8n$; $n(n+1)(5n+7)/3$.

2. 2^n+1 ; $2^{n+1}+n-2$.

3. 2^n+n+5 ; $2^{n+1} + (n^2+11n-4)/2$.

4. 2.3^n+n+3 ; $2^{n+1} + (n^2+7n-3)/2$.

5. $(n^2-3n+11)$; $\frac{n(2n^2-15n+49)}{3}$

6. n^3-2n^2+8n+1 ; $\frac{n^3(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{8}$
 $+ \frac{3n(n+1)}{2} + n$

7. $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$;
 $\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

8. $2^{n-1} + 6+2(n-1)$; $2^{n-1} + (n^2+5n-1)$

9. $3^{n-1} + n$; $\frac{1}{2}(3^n+n^2+n-1)$.

II. 1. $\frac{3+x}{1-x-2x^2}$; $\frac{1}{3} \{2(-1)^{n-1} + 7.2^{n-1}\} x^{n-1}$

2. $\frac{1+3x}{(1-x)^2}$; $(4n+1)x^n$.

3. $\frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$; $(1+2^n)x^n$.

4. $a. -11$

$$4. \frac{11x^2 - 12x + 8}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3}; \quad (1 + 2^x + 3^x)x^n.$$

$$5. \frac{8 + 6x - 12x^2}{(1-x)(1-2x)(1+3x)}; \quad 2 + 3 \cdot 2^{n-1} + (-3)^{n-1}.$$

$$\text{III. } 8(2^{n+1} - 3^{n-1})x^n; \quad 12x \left[\frac{(4x)^n - 1}{4x - 1} \right] \\ - 6x \left[\frac{(8x)^n - 1}{8x - 1} \right]$$

இரண்டாம் பாகம்

1. அனிக்கோவை

1.1. ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைப் பொறுத்தவரை 'அனிக்கோவை'வைப் பயன்படுத்துகிறோம். $a_1x + b_1 = 0$, $a_2x + b_2 = 0$ என்ற இரு சமன்பாடுகளுக்கும் ஒரே தீர்வு இருக்குமெனில்,

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \quad \text{இச்சமன்பாட்டின் இடப் புறமுள்ள கோவை} \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \text{ அல்லது } (a_1 b_2) \text{ எனக் குறிக்கிறோம்.}$$

இது இரண்டாம் நிலை அனிக்கோவை எனப்படும்.

அடுத்து,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் இரு சமன்பாடுகளிலிருந்து குறுக்குப் பெருக்கல் விதியின்படி

$$b_1c_2 - b_2c_1 = \frac{x}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

எனக் கிடைக்கிறது. x, y -ன் இம்மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (3)-ல் பிரதியிட, $\therefore a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$. இச்சமன்பாட்டில் இடப் புறத்திலுள்ள கோவை மூன்றாம் நிலை அனிக்கோவை எனப்படும். இதை,

$$\left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right| = 0 \quad \text{என எழுதுகிறோம்.}$$

இதன் இடப் புறமுள்ள அணிக்கோவைகளை விரித்தெழுதியால் கிடைப்பது.

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

இக்கோவைகளைக் கவனித்தால் கீழ்க்கண்ட உண்மைகள் தெரிய வரும்.

(i) a, b, c என்ற எழுத்துகளை இவ்வரிசைகளில் எழுதி, 1, 2, 3 ஆகியவற்றை எக்லா வகையிலும் வரிசைப்படுத்தி அடிக்கூறிகளாக எழுதியால் அணிக்கோவையின் எக்லா உறுப்புகளும் கிடைக்கும்.

(ii) அடிக்கூறிகளின் வரிசையைப் பொறுத்து உறுப்புகளின் குறி அமைவும். 1, 2, 3 என வருவதை இயற்கை வரிசையெனக் கொண்டு, $a_1b_2c_3$ நேரீக் குறி உடையது எனக் கொள்வோம். ஓர் உறுப்பில் அடிக்கூறிகளை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்குத் தேவையான மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படைவாக இருந்தால் அப்பொழுது அமைவும் உறுப்பு நேரீக் குறி உடையது எனவும், ஒற்றைப் படைவாக இருந்தால் அது எதிர்க்குறி உடையது எனவும் தெரியப் பெறுகின்றன. இதையே பொதுவான விதியாகவும் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவையின் விரிவில் $a_1b_1c_1d_1, a_2b_1c_1d_1, a_4b_1c_1d_1, a_1b_4c_1d_1$ ஆகியவற்றின் குறிகள் என்ன?

$a_1b_1c_1d_1$ -ல் அடிக்கூறிகளின் வரிசை 1, 2, 3, 4. இதை 2, 1, 3, 4; 1, 2, 4, 3 என்ற இரு மாற்றங்களில் 1, 2, 3, 4 என்ற இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வரலாம். எனவே $a_1b_1c_1d_1$ -ன் குறி + ஆகும்.

இதேபோன்று $a_2b_1c_1d_1, a_4b_1c_1d_1, a_1b_4c_1d_1$ ஆகியவற்றின் குறிகள் முறையே +, -, + ஆகும்.

1.2. $a, b, c \dots l$ என்ற n எழுத்துகளையும் 1, 2, ... n என்ற அடிக் குறிகளையும் வைத்து n திரைகளும் n திரைகளும் அமைந்த n ஆம் திரை அணிக்கோவைவை

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_r & b_r & c_r & \dots & l_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

என அமைக்கலாம். இதிலுள்ள a_1, a_2, \dots என்ற n^2 எண்கள் ஒவ்வொன்றும் அணிக்கோவையின் மூலகம் எனப்படும்.

$a, b, \dots l$ ஆகியவற்றை இடே வரிசையில் அமைத்து 1, 2, ... n ஐ என்ன வகைகளிலும் வரிசைப்படுத்தி $a, b, \dots l$ -க்கு அடிக் குறிகளாக அமைத்து, தகுந்த குறியை இருவதன் மூலம் இயல்வணிக் கோவைவரின் உறுப்புகள் காணப் பெறுகின்றன.

1, 2, ... n ஆகியவற்றை $n!$ வகைகளில் வரிசை மாற்றங்கள் செய்யலாம். எனவே அணிக்கோவைவரின் விரிவில் $n!$ உறுப்புகள் இருக்கும். இங்கு 1, 2, 3, ..., n என்ற வரிசையை இயற்கை வரிசையாகக் கொள்வோம். எனவே $a_1, b_1, c_1, \dots l_1$ ஐ தேர் மதிப்புடையதாகக் கொள்வோம். ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பில் $a, b, \dots l$ என்ற எழுத்துகளின் அடிக் குறிகளை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்கு எத்தனை மாற்றங்கள் தேவையோ அதைப் பொறுத்து உறுப்பின் குறி தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இம் மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படியாகவோ அல்லது ஒற்றைப் படியாகவோ இருப்பின் குறிப்பிட்ட உறுப்பின் குறி முறையே தோரகவோ, அல்லது எதிராகவோ கொள்ளப்படும்.

குறிப்பு :

1. $a_1, b_1, c_1, \dots l_1$ ஆகியவற்றைக் கொண்ட முயல்வரை முதன்மை வரை (principal diagonal) எனவும், இவ்வெண்களைக் கொண்ட $a_1, b_1, c_1, \dots l_1$ என்ற உறுப்பு முதன்மை உறுப்பு (leading term) எனவும் கூறப்படும்.

2. மேலும் அணிக்குகைவாயில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் தீர்மான வரிசை ஆகியவை ஒவ்வொன்றிலிருத்தும் ஒரே ஒரு மூலகம் எடுத்தால் உடையது என்பதும் குறிப்பிடத் தக்கது. அதாவது ஒர் உறுப்பில் b_i என்ற எழுத்து இருப்பின் அங்குறுப்பில் b என்ற எழுத்து மற்றொரு மூலக இராது. மேலும் 5 என்ற அடிக் குறியைக் கொண்டு வேறெத்த காரணியும் இராது.

3. அணிக்குகைவாயில் உறுப்புகளை அமைப்பதற்கு a, b, \dots என்ற எழுத்துகளை இதே வரிசையில் நிலையாக வைத்து அடிக் குறிகளை வரிசை மாற்றம் செய்வதற்குப் பயிலாக 1, 2, ..., n என்ற அடிக் குறிகளை நிலையாக வைத்து a, b, \dots என்ற எழுத்துகளை வரிசை மாற்றங்கள் செய்தாலும் மேற்குறித்த அணிக்குகைவாயில் உறுப்புகள் கிடைக்கும். இங்கு a, b, c, \dots என்ற எழுத்துகளின் வரிசையை இயற்கையாகக் கொண்டு மூல்பொலவே உறுப்புகளின் குறியைத் தீர்மானிக்கிறோம்.

1.3. தேற்றம் 1:

தீர்க்கும் திரகணாகவும், திரகளை தீர்க்கணாகவும் மாற்றி யமைத்தால் அணிக்குகைவாயில் மதிப்பு மாறாது.

தொட்பு:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & k_n \end{vmatrix} \quad \text{எனவும்,}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix} \quad \text{எனவும் கொள்வோம்.}$$

Δ , Δ' இயற்றின் முதன்மை உறுப்புகள் ஒன்றே. அதாவது a_1, b_2, \dots, k_n . Δ —ன் மற்ற உறுப்புகள் முதன்மை உறுப்பின் எழுத்துகளை இயற்கை வரிசையில் வைத்து அடிக் குறிகளை எக்ஸ்சைடுகளிலும் வரிசை மாற்றம் செய்து தகுந்த குறியிடுவதன் மூலம் கிடைக்கும்.

Δ -ன் மற்ற உறுப்புகள் முதன்மை உறுப்பின் அடிக்குறிகளை இயற்கை வரிசையில் வைத்து எழுத்துகளை எல்லா வகைகளிலும் வரிசை மாற்றம் செய்து தரும் குறியீடுவதன் மூலம் கிடைக்கும். ஆனால் இயல்பு வரிகளிலும் கிடைக்கும் ஒத்த உறுப்புகள் ஒன்றுக் கொன்று ஒத்திலும் சமமாயிருக்கும். எனவே

$$\Delta = \Delta'$$

1-4 தேற்றம் 2 :

ஒர் அணிக்குகையின் ஒர் உறுப்பின் இரு அடிக்குறிகளை மாற்றுவதால் அணிக்குகையின் மற்றொரு உறுப்பு கிடைக்கும். இயல்பு உறுப்புகளும் எதிரெதிர்க் குறியுடையன.

தெரியு :

(a_1, b_1, \dots, k_n) என்ற அணிக்குகையில் $(a_1, b_1, \dots, c, d, \dots, k_n)$ என்ற உறுப்பின் r, s என்ற அடிக்குறிகளை மாற்றினால் கிடைப்பது $a_1, b_1, \dots, c, d, \dots, k_n$. இந்த உறுப்பில் கொடுத்துள்ள அணிக்குகையில் ஒவ்வொரு நிரலிலிருத்தும் ஒரே ஒரு எழுத்தும் ஒவ்வொரு நிரலிலிருத்தும் ஒரே ஒரு எழுத்தும் தான் அமைந்துள்ளன. மேலும் இதிலுள்ள எழுத்துகள் கொடுத்துள்ள அணிக்குகையின் மூலக்களங்களும். நாம் எடுத்துக் கொண்ட உறுப்பில் அடிக்குறிகளை இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்கு வேண்டிய மாற்றங்கள் x என இருத்தால் $(x+1)$ மாற்றங்களில் $a_1, b_1, \dots, c, d, \dots, k_n$ ஐ இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவாம். ஏனெனில் இயல்பு உறுப்புகளையும் 2 அடிக்குறிகளை ஒன்றை ஒன்று மாற்றுவதன் மூலம் பெறுகிறோம். x இரட்டைப் படை எண் எனில் $(x+1)$ ஒற்றைப் படை எண், எனவே, இரு உறுப்புகளும் வெவ்வேறு குறியைக் கொண்டிருக்கும்.

1-5. தேற்றம் 3 :

ஒர் அணிக்குகையின் இரு நிரல்களையோ அல்லது இரு நிரல்களையோ ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பதால் கொடுத்துள்ள அணிக்குகை குறியில் மாறும்; என்ற மதிப்பு மாறாது.

தெரியு :

ஏனெனில் இரு நிரல்களை ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பது இரு அடிக்குறிகளை ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பதற்குச் சமமாகும். இதேபோன்ற இரு நிரல்களை ஒன்றையொன்று மாற்றி அமைப்பது இரு எழுத்துகளை ஒன்றையொன்று மாற்றியமைப்பதற்குச் சமமாகும். எனவே இரு நிரல்களிலும் அணிக்கு

கோவையின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மாற்றாக குறியைப் பெறும். உறுப்புகளின் எண் மதிப்பு மாறாது எனவே, அணிக்கோவைமே மாற்றாக குறியைப் பெறும். இதன் எண் மதிப்பு மாறாது.

1.6 தேற்றம் 4 :

இரு நிரல்களையோ, இரு நிரல்களையோ ஒத்திலும் சமமாகக் கொண்ட ஓர் அணிக்கோவைவின் மதிப்பு பூச்சியமாகும். கொடுத்திருக்கின்ற அணிக்கோவை Δ -ல் குறிப்பிட்ட இரு நிரல்களை ஒன்றோடொன்று மாற்றியமைப்பதால் அணிக்கோவைவின் மதிப்பு எண்ணத்திலும் குறியிலும் மாறாது. ஆனால், மேற்குறித்த தேற்றத்தின்படி எந்த இரு நிரல்களை ஒன்றோடொன்று மாற்றியமைத்தாலும் அணிக்கோவைவின் மதிப்பு குறியளவில் மாறும்.

எனவே,

$$\Delta = -\Delta \quad \therefore \Delta = 0.$$

கிடைத்தேற்றம் 1 :

Δ என்ற அணிக்கோவைவின் மூலகங்கள் x -ன் அளவுக் கிடைக்கிய மூலச் சார்புகள் எனில் $x = a$ எனப் பிரதியிடுவதால் இரு நிரல்கள் அகலது இரு நிரல்கள் ஒத்தும் சமமானால் $(x-a)$, Δ -ன் ஒரு காரணியாகும்.

ஏனெனில் Δ -ல் விரிவு x -ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். $x = a$ எனப் பிரதியிடுவதால் $\Delta = 0$ ஆவதால் மீதித்தேற்றத்தின்படி $(x-a)$, Δ -ன் ஒரு காரணியாகும்.

கிடைத்தேற்றம் 2 :

Δ -ல் $x-a$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் r நிரல்கள் (நிரல்கள்) ஒத்தும் சமமெனில் $(x-a)^{r-1}$, Δ -ன் ஒரு காரணியாகும்.

1.7. தேற்றம் 5 :

ஓர் அணிக்கோவைவின் ஒரு குறிப்பிட்ட நிரல் அகலது நிரலின் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் k என்ற எண்ணுதல் பெருக்கினால் அணிக்கோவைவின் மதிப்பு k மடங்காகும்.

தெரியு :

ஏனெனில் அணிக்கோவைவின் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்தும் ஒவ்வொரு நிரலிலிருந்தும் ஓரே ஒரு மூலகம் தான் இருக்கும். எனவே ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் k ஒரு காரணியாக இருக்கும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

மறுதலியாக, ஏதேனும் ஒரு திரை அல்லது திரையில் எல்லா மூலங்களும் k வளும் பொதுக் காரணி கொண்டிருத்தால், k அணிக்கோவையின் ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \text{ -ன் மதிப்புக் காண்க.}$$

Δ -ன், $a = b$ எனப் பிரதிபிடுகையில் இரண்டு திரைகள் am மாவதால் $\Delta = 0$. $\therefore (a-b)$ ஆனது Δ -ன் ஒரு காரணியாகும். இதே பொன்று $(b-c)$, $(c-a)$ ஆகியவையும் Δ -ன் காரணி களாகும். Δ இ விரித்தெழுதினால் அது a, b, c -களிலமைந்த மூன்றாம் படிக்கோவைவாகும்.

எனவே $\Delta = k(a-b)(b-c)(c-a) \dots (k \text{ நிலையெண்.})$

Δ -ன் முதன்மை உறுப்பு a^2b

வலம் பக்கத்தில் a^2b -ன் கெழு = $-k$.

$$\therefore k = -1.$$

$$\therefore \Delta = -(a-b)(b-c)(c-a)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \text{ -ன் மதிப்புக் காண்க.}$$

Δ -ல் $x-y$ எனப் பிரதியிட்டால் இது நிரல்கள் சமமாகவதால், $(x-y)$ ஆனது Δ -ன் ஒரு காரணிவாகும். இதேபோன்று $(y-z)$, $(z-x)$ ஆகியவையும் Δ -ன் காரணிவாகும். Δ -ன் எவ்வித x , y , z -ல் அமைந்த l ஆம் படிக்கோவைவாகும்.

$$\therefore \Delta = [l(x^2+y^2+z^2) + k(xy+yz+zx)] \\ (x-y)(y-z)(z-x)$$

l, k ஆகியவை, x, y, z சார்ந்த தலை எண்கள்.

அளிக்கோவையின் உறுப்பில் x^2 தான் x -ல் அமைந்த மிக உயர்ந்த படி கொண்ட உறுப்பு. x^2 உறுப்பு இல்லை.

$$\text{ஆனால் வலப் பக்கத்தில் } x^2 \text{ உறுப்பு} = lx^2(y-z)$$

$$\therefore l = 0. \quad \text{முதன்மை உறுப்பு } y^2z^2$$

$$\therefore 1 = -k$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore \Delta = -(xy+yz+zx)(x-y)(y-z)(z-x)$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^2$$

என நிறுவுக.

(செ.ப.க.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ b^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \quad \text{எனக் கொள்ளோம்.}$$

இதில் $a = 0$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & 0 & 0 \\ b^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & b^2 \end{vmatrix} \\ = (b+c)^2(b^2c^2 - b^2c^2) = 0,$$

∴ a, b, c -ன் ஒரு காரணியாகும். இதைப்போன்றே b, c ஆகியவையும் Δ -ன் காரணியனாகும்.

இப்போது $a = -(b+c)$ என Δ -ல் பிரதியிட்டால்

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-a)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (-b)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (-c)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

இங்கு ஒன்று நிரம்பும் ஒத்திலும் சமமாகிறப்பதால் $\Delta = 0$.

∴ $(a+b+c)^2$, Δ -ன் மத்தொரு காரணியாகும்.

Δ ஆனது a, b, c அமைந்த ஒரு மடித்தளம், சமச்சீர்தடைய ஆனவது மடிக்கோவைவாகும்.

எனவே $\Delta = Nabc(a+b+c)^2$ இங்கு N, a, b, c அமைந்த சமச்சீர் ஒருமடிக்கோவைவாகும்.

∴ $\Delta = k(a+b+c)abc(a+b+c)^2$ (k -தெரியென்க)

Δ -ல் $a=1, b=1, c=1$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$$27k = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-1) - 1(4-1) + 1(1-4) = 64$$

∴ $k = 8$.

∴ $\Delta = 8abc(a+b+c)^2$

மேற்றுக்காட்டு 4 :

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ என நிறுவுக.

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \text{என இருக்கட்டும்.}$$

$$\Delta = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^3 & a^3 \\ abc & b^3 & b^3 \\ abc & c^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

[முதல் திரையின் மூலகங்களை 'a' ஆளும், 2-ஆம் திரையின் மூலகங்களை 'b' ஆளும், 3-ஆம் திரையின் மூலகங்களை 'c' ஆளும் பெருக்க]

$$= \frac{1}{abc} \cdot abc \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2 \\ 1 & b^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

[முதல் திரையிலிருந்து abc என்னும் பொதுக்காரணி எடுக்க.]

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2 \\ 1 & b^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(ab+bc+ca) (a-b) (b-c) (c-a) \quad [\text{எ.கா. (B)-ன் படி}]$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\begin{vmatrix} x^2-l^2 & (x-l)^2 & x-l \\ l^2+x^2+lx & l^2 & 1 \\ lx(l^2+x^2)+l^2x^2 & l^2x^2 & lx \end{vmatrix} = 0$$

எனக் காட்டுக.

கொடுத்துள்ள அணிக்குகாவல

$$= (x-l) \begin{vmatrix} x^2+lx+l^2 & (x-l)^2 & 1 \\ l^2+x^2+lx & l^2 & 1 \\ l^2+x^2+lx & lx & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-l) \cdot lx (x^2+lx+l^2) \begin{vmatrix} 1 & (x-l)^2 & 1 \\ 1 & l^2 & 1 \\ 1 & lx & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-l) \cdot lx (x^2+lx+l^2) \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

[∴ அணித்தொலைவின் இரு பக்கம் முற்றிலும் சம.]

மதிப்பு 1 (a)

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix} \\
 &= -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta) \\
 &\text{எனப் படியும்.}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc \text{ எனக் கருள்.}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\
 & \text{எனப் படியும்.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \begin{vmatrix} a^2+ab+bc+ca & a^2-b^2 & (a+b)^2 \\ ab+bc & ab-b^2 & ab+b^2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \\
 & \text{எனப் படியும்.}
 \end{aligned}$$

என்ற அணிக்கோவைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் விரியில் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் நிரம், நிரை, ஆகியவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் ஒரே ஒரு மூலகம்தான் இருக்கும். எனவே இதன் விரியை a_1 ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் + b_1 ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் + + k_1 ஐக் கொண்ட உறுப்புகள் என, அதாவது

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + \dots + k_1 K_1 \text{ என எழுதலாம்.}$$

A_1 -ல் a_1 ஐக் கொண்ட நிரம், நிரை ஆகியவற்றிலிருந்து மூலகங்கள் இராது. இதே போன்றே $B_1 \dots K_1$ ஆகியவை அமையும்.

A_1 ஐக் கண்டுபிடிக்க: a_1 ஐக் கொண்ட எல்லா உறுப்புகளும் தலைமைபுறுப்பான $a_1, b_1, c_1 \dots k_1$ -ல் a_1 ஐ நிலையாக வைத்து 2, 3 ... n என்ற மற்ற அடிக் குறிகளை மற்ற எழுத்துகளுக்கு எல்லா வகையிலும் வரிசை மாற்றம் செய்வதால் கிடைக்கும். இவ்வாறான வரிசை மாற்றத்தில் கிடைக்கும் ஒவ்வொரு உறுப்பின் அடிக் குறிகளையும் இயற்கை வரிசைக்குக் கொண்டு வருவதற்குத் தேவையான மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்து அம் உறுப்பின் குறியைத் தீர்மானிக்கிறோம். எனவே a_1 காணப்படும் நிரம், நிரையை Δ யிலிருந்து நீக்குவதன் மூலம் கிடைக்கும் ($b_1, c_1 \dots k_1$)க்கு A_1 சமவாசும். இதேபோன்று வேறு ஏதேனும் கெழு, உதாரணமாக C_1 ஐக் கண்டுபிடிக்கக் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பின்பற்றலாம். அடுத்தடுத்த நிரைகளை ஒன்றைப் பொன்று மாற்றி அமைப்பதன் மூலம் c_1 அமைந்த நிரையை முதல் நிரையாகக் கொண்டு வரலாம். அடுத்து இதே போன்று அடுத்தடுத்த நிரைகளை ஒன்றைப்பொன்று மாற்றி அமைப்பதன் மூலம் c_2 அமைந்த நிரம் இடப் பக்கத்தில் முதல் நிரையாகக் கொண்டு வரலாம். இந்த நிலையில் c_3 அமைந்த நிரை, நிரம் நீக்கலாக மற்ற நிரம், நிரைகளிலுள்ள மூலகங்கள் கொடுத்துள்ள அணிக் கோவைகளைப் பொருத்த தத்தம் நிலை மாறாமல் இருக்கும்.

இப்போது அடுத்தடுத்த நிரம் அம்வது நிரைகள் ஒன்றைப் பொன்று மாற்றல் ஒவ்வொரு மாற்றத்திற்கும் அணிக்கோவைகளைக் குறி மாறுபடும். c_4 ஐ 5ஆவது நிரையிலிருந்து முதல் நிரைக்கு 4 மாற்றங்களுக்குப் பின்னும், அதன் பின்னர் மூன்றாவது நிரையிலிருந்து முதல் நிரைக்கு 3 மாற்றங்களுக்குப் பின்னும் கொண்டு வரலாம். எனவே புதிய நிலையில் c_4 இன் குணகத்தின் குறி $(-1)^{4+2}$ ஆகும். எனவே c_4 காணப்படும் நிரம், நிரை நீக்கலாக அமைந்த அணிக்கோவைகளை $(-1)^5$ ஆல் பெருக்கி வருவது C_4 -ன் மதிப்பாகும்.

$(a_1b_1 \dots b_n)$ என்ற அணிக்கோவையில் a_1 என்ற மூலகம் அமைந்த திரம், திரை இவை நீங்கலாக அமைந்த அணிக் கோவையே a_1 இன் சிற்றணிக்கோவை (minor) A' எனப்படும். அணிக்கோவையின் விகிதம் a_1 -ன் குணகம். a_1 என்னும் மூலகத்தின் இணைக் காரணி (co-factor) எனப்படும். எனவே a_1 -ன் சிற்றணிக்கோவைக்குத் தகுந்த குறியிட்டால் அது a_1 -ன் இணைக் காரணி ஆகும். ஒரு குறியிட்ட மூலகத்தை அணிக் கோவையின் இடப் பக்கம் முதல் திரையில் முதல் மூலகமாகக் கொண்டு வர அடுத்தடுத்த திரம், திரை ஆகியவற்றின் எத்தனை மாற்றங்கள் தேவைப்படுகின்றனவோ அவற்றைப் பொறுத்து அதன் இணைக் காரணி தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இம் மாற்றங்கள் இரட்டைப் படைபாகவோ, ஒற்றைப் படைபாகவோ இருப்பின் சிற்றணிக்கோவைக்கு முறையே $+$, $-$ குறியிடுவதன் மூலம் இணைக் காரணி பெறுகிறோம். சான்றாக r ஆவது திரம், s ஆவது திரைக்கு அமைந்த உறுப்பின் (a_{rs}) இணைக் காரணி $G_{rs} = (-1)^{r+s} G'_{rs}$ ஏனெனில், a_{rs} இடம் பெற்றிருந்த திரைக்குக் கொண்டு வருவதற்கு திரம் திரையின் அமைக்க வேண்டிய மாற்றங்கள் $=(r-1) + (s-1)$. எனவே a_{rs} -ன் சிற்றணிக்கோவைக்குத் தகுந்த குறியிட்டால் அது a_{rs} -ன் இணைக்காரணி என வரையறை செய்யலாம்.

இப்போது a_1 ன் சிற்றணிக்கோவை, இணைக் காரணி ஆகியவை மூற்றிலும் சமம். அதாவது $A_1' = A_1$. எனவே $\Delta = a_1 A_1' - b_1 B_1' + c_1 C_1' + \dots + (-1)^{n-1} a_n G_n' = \Delta$ என விரித்தெழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

குறியீடு: $\Delta = a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n$

$$= a_1 A_1 + b_1 B_1 + \dots + l_1 L_1$$

$$= a_2 A_2 + b_2 B_2 + \dots + l_2 L_2$$

என வெவ்வேறு வகைகளில் அணிக்கோவைவை விரித்தெழுதலாம் என்பது இப்போது தெளிவாகிறது. இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

1-9. தேற்றம் 9 :

அணிக்கோவையின் ஒருதிரையின் (அல்லது திரையின்) மூலகம் a_{rs} மற்றொரு திரையின் (அல்லது திரையின்) ஒத்த மூலகங்களின் இணைக் காரணிகளால் பெருக்கிலும் இயற்றின் உருதல் பூச்சியம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \text{ -ன் மதிப்புக் காண்க.}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} h & g \\ f & c \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} h & g \\ b & f \end{vmatrix} \\ &= a(bc - f^2) - h(ch - fg) + g(hf - bg) \\ &= abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{ -ன் மதிப்புக் காண்க.}$$

நான்காம் நிரலில் மூலங்கள் மூலமாக விரித்தெழுதக் கிடைப்பது

$$1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad (\text{ஏனெனில் இத்திரிகில் மற்ற மூலங்கள் பூச்சியம்.})$$

இவ்வணித்கோவையை இரண்டாம் நிரை மூலங்கள் கொண்டு விரிவு படுத்தினால் கிடைப்பது

$$-3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3(18 - 0) = -54.$$

∴ கொடுத்துள்ள அணித்தோவையின் மதிப்பு = -54.

பயிற்சி 1 (b)

கீழ்க்கண்டவற்றைத் தீர்வுசெ.

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -2.$$

$$2. \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 28.$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$4. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 102$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 87$$

$$6. \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix} = -8$$

$$7. \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = 1$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$10. \begin{vmatrix} x-a & a & a \\ a & x-a & a \\ a & a & x-a \end{vmatrix} = x(x-a)(x-2a)$$

$$11. \begin{vmatrix} (y-z)^2 & x^2 & y^2 \\ x^2 & (x-z)^2 & x^2 \\ y^2 & x^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2(xy-yz-zx)^2$$

$$12. \begin{vmatrix} b^2 & a^2 & (a+b)^2 \\ 1 & (a+1)^2 & a^2 \\ (b+1)^2 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = -2(ab+a+b)^2$$

1.10. தேற்றம் 7 :

ஒர் அணித்தொகையின் ஏதேனும் ஒரு திரும் அல்லது திரையின் ஒப்பொரு லாகத்தையும் இது இரூபிகளின் கூடுத லாக எழுதியும் அணித்தொகையை இது அணித்தொகையளின் கூடுதலாக எழுதலாம். ஏனெனில்,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ எனில்}$$

Δ ஐ $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ என எழுதலாம். இங்கு A_1, A_2, A_3 ஆகியவை மூன்றாவே a_1, a_2, a_3 சார்பற்றவை.

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)A_1 + (\alpha_2 + \beta_2)A_2 + (\alpha_3 + \beta_3)A_3 \\ &= (\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \alpha_3A_3) + (\beta_1A_1 + \beta_2A_2 + \beta_3A_3) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & b_1 & c_1 \\ \beta_2 & b_2 & c_2 \\ \beta_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1.11. தேற்றம் 8 :

ஒர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரல் அல்லது நிரலின் மூலங்களையுடன் மற்றொரு நிரல் அல்லது நிரலின் ஒத்த மூலங்களின் k மடக்கைக் கூட்டினால் அணிக்கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

ஏனெனில்,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \text{ எனவும்,}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

எனவும் இருக்கட்டும். இங்கு k ஏதேனும் ஓர் எண்.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 \\
 &= [a_1 \ b_1 \ c_1]
 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta' = \Delta$$

குறிப்பு :

இதே அடிப்படையில்

$$\begin{vmatrix} l_1 a_1 + l_2 b_1 + l_3 c_1 & b_1 & c_1 \\ l_1 a_2 + l_2 b_2 + l_3 c_2 & b_2 & c_2 \\ l_1 a_3 + l_2 b_3 + l_3 c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = l_1 [a_1 \ b_1 \ c_1]$$

குறிப்பு :

மேற்குறித்தபடி, நிரல்கள், நிரல்களை மாற்றி அமைக்கும்போது குறைந்தது ஒரு நிரல் அல்லது நிரையை மாற்றம் செய்யாமல் விட்டு வைத்தல் வேண்டும். மேலும் கணக்குகளில் $R_1, R_2, R_3, \dots; C_1, C_2, C_3$ ஆகியவை முறையே முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது நிரல்களையும், நிரல்களையும் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

a, b, c வேவ்வேறு மதிப்புடையவை எனவும்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$$

எனவும் இருந்தால் $abc = -1$ என நிறுவுக.

[செ.ப.க.]

கொடுத்ததன் அணிச்சோதனையை Δ எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + abc \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1+abc) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

a, b, c ஆகியவை வெவ்வேறு மதிப்புகளடைய ஆதலால்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore abc + 1 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

நிலை வார்ப்பு :

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ b & x+c & a \\ c & a & x+b \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{செ.ப.க.})$$

கொடுத்ததன் x -ல் அமைந்த முப்படிச் சமன்பாடு ஆகும். அணிச்சோதனையை Δ எனக் கொள்வோம்.

Δ -ன் மூலவது மூலவது நேரங்களின் மூலங்களின் மூலம்
நேரங்கள் கூட்டியது கிடைப்பது

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+c & a \\ x+a+b+c & a & x+b \end{vmatrix} = 0.$$

$$\therefore (x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+c & a \\ 1 & a & x+b \end{vmatrix} = 0$$

$$[R_2 - R_1, R_3 - R_1]$$

$$(x+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & x+c-b & a-c \\ 0 & a-b & x+b-c \end{vmatrix}$$

$$\therefore (x+a+b+c) [x+c-b] [x+b-c] - (a-b)(a-c) = 0.$$

$$\text{ஆகவே } (x+a+b+c) [x^2 - (c-b)^2 - (a-b)(a-c)] = 0$$

$$(x+a+b+c) [x^2 - (c^2 + b^2 - 2bc + a^2 - ac - ab + bc)] = 0$$

$$(x+a+b+c) [x^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)] = 0$$

$$\therefore x = -(a+b+c) \text{ ஆகவே}$$

$$\pm (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \text{மூலங்களின் மூலங்கள் } -(a+b+c),$$

$$\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = (x-2y+z)^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

(செ.ப.உ.)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & x \\ 5 & 6 & 7 & y \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} \quad \text{என இருக்கட்டும்.}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x-2y+z \\ -1 & -1 & -1 & y-z \\ 6 & 7 & 8 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

$$[R_1 - 2R_2 - R_3, R_3 - R_2]$$

$$= -(x-2y+z) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 8 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -(x-2y+z) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ x-y & y-z & z \end{vmatrix} [C_1 - C_2, C_2 - C_3]$$

$$= (x-2y+z) [-(y-z) + x-y]$$

$$= (x-2y+z)(x-2y+z)$$

$$= (x-2y+z)^2$$

$$\therefore \Delta = (x-2y+z)^2$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \\ -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{ஒரு சரியான வர்க்கம் எனக்} \\ \text{காட்டு.} \end{array} \quad (\text{செ.ப.அ.})$$

என இருக்கட்டும்.

$$\begin{aligned}
\Delta &= abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} \\
&= a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} [C_2 + C_1, C_3 + C_1] \\
&= a^2 b^2 c^2 [-1(-4)] \\
&= 4a^2 b^2 c^2 \\
&= (2abc)^2.
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

பதிலுரை :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0 \\
\Delta &= \begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3a-x & a-x & a-x \\ 3a-x & a+x & a-x \\ 3a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} [C_1 + C_2 + C_3]
\end{aligned}$$

$$= (3a-x) \begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 1 & a+x & a-x \\ 1 & a-x & a+x \end{vmatrix}$$

$$= (3a-x) \begin{vmatrix} 1 & a-x & a-x \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} [R_2 - R_1, R_3 - R_1]$$

$$= (3a-x) (4x^2 - 0)$$

$$\therefore (3a-x) 4x^2 = 0$$

\therefore சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $0, 0, 3a$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$$\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ எனக் காட்டு.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

$$\Delta = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab^3c^2 & abc & ab+ac \\ bc^3a^2 & bca & bc+ba \\ ca^3b^2 & cab & ca+cb \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{abc} \cdot a^2b^3c^3 \begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac \\ ca & 1 & bc+ba \\ ab & 1 & ca+cb \end{vmatrix}$$

$$= abc \cdot \begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac+bc \\ ca & 1 & bc+ba+ca \\ ab & 1 & ca+ab+cb \end{vmatrix} [C_2+C_3]$$

$$= abc (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} bc & 1 & 1 \\ ca & 1 & 1 \\ ab & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc (ab+bc+ca) \times 0$$

(ஏனெனில், இது நிராகக் முற்றிலும் சமம்.)

$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

$$= abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

என நிறுவுத. (செ.ப.க.)

$$\Delta = abcd \begin{vmatrix} \frac{1}{a} + 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1 + \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 + \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 + \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

(a, b, c, d ஆகியவற்றை அந்தந்த நிராகங்களினாலும் பொதுக் காரணியாக எடுக்கவும்.)

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1 \\
 & \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{b} + 1 \\
 & \quad \frac{1}{c} \quad \frac{1}{c} \\
 & \quad \frac{1}{d} \quad \frac{1}{d} \\
 & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1 \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1 \\
 & \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{b} \\
 & \quad \frac{1}{c} + 1 \quad \frac{1}{c} \\
 & \quad \frac{1}{d} \quad \frac{1}{d} + 1
 \end{aligned}$$

$$\Delta = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} + 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} + 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} + 1 \end{array} \\
 & = abcd \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{d} & 0 & 0 & 1 \end{array} \\
 & \quad (C_3 - C_1, C_3 - C_1, C_4 - C_1)
 \end{aligned}$$

$$= abcd \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1 \right)$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^3 & a^3+2a & 3a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^3 \text{ எனக் கருதிக்கொள். (சொ.ப.க.)}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^3 & a^3+2a & 3a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{எனக் கருதிக்கொள்.}$$

$$= \begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^3-a^3 & 3a-2a^3 & 1-a & 0 \\ a-a^3 & 1-a^3 & 1-a & 0 \\ 1-a & 2-2a & 1-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$[R_2-R_1, R_3-R_1, R_4-R_1]$$

$$= -1 \begin{vmatrix} a^3-a^3 & 3a(1-a) & (1-a) \\ a(1-a) & 1-a^3 & (1-a) \\ 1-a & 2(1-a) & (1-a) \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)^3 \begin{vmatrix} a^3 & 3a & 1 \\ a & 1+a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)^3 \begin{vmatrix} a^3 & 3a & 1 \\ a-a^3 & 1-a & 0 \\ 1-a & 1-a & 0 \end{vmatrix} [R_2-R_1, R_3-R_1]$$

$$\begin{aligned}
 &= -(1-a)^3 \begin{vmatrix} a-a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a \end{vmatrix} \\
 &= -(1-a)^3 (1-a)^3 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -(1-a)^3 (a-1) \\
 &= (1-a)^3
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$\begin{vmatrix} x^4 & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 & x \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x & 1 & x^3 \end{vmatrix} = (x^4-1)^2 \text{ என தீர்வுக.}$$

(செ.ப.க.)

கொடுத்துள்ள ஆணிக்கோவை Δ என இருக்கட்டும். இதன் மூலம் திரிபு x ஆனும், இரண்டாவது திரிபு x^2 ஆனும், மூன்றாவது x^3 ஆனும் பெருக்கினால் கிடைப்பது

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \frac{1}{x \cdot x^2 \cdot x^3} \begin{vmatrix} x^4 & x^4 & x^4 & 1 \\ x & x^2 & x^2 & x \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{x^6} \begin{vmatrix} x^4-1 & x^4 & x^4 & 1 \\ 0 & x^2-x & x^2-x & x \\ 0 & 0 & x^2-x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} [C_1-C_4, C_2-C_4, \\ C_3-C_4] \end{matrix} \\
 &= \frac{1}{x^6} \cdot (x^2-1) \begin{vmatrix} x^2-x & x^2-x & x \\ 0 & x^2-x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^4} (x^4 - 1)(x^4 - x^2) \cdot x^2 \cdot x^2 \begin{vmatrix} x^4 - 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(x^4 - 1)}{x^4} \cdot x^2 (x^4 - 1)(x^4 - 1) \\
&= (x^4 - 1)^2.
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\begin{vmatrix} ax - by - cz & ay + bx & cx + az \\ ay + bx & by - cz - ax & bz + cy \\ cx + az & bz + cy & cz - ax - by \end{vmatrix} \\
= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)(ax + by + cz) \text{ என நிறுபிக்க.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ax - by - cz & ay + bx & cx + az \\ ay + bx & by - cz - ax & bz + cy \\ cx + az & bz + cy & cz - ax - by \end{vmatrix}$$

முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் நிரல்களை முறையே x, y, z ஆல் பெருக்கி, முதல், இரண்டாம், மூன்றாம் நிரல்களை முறையே a, b, c ஆல் பெருக்க.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{abcxyz} \times \\
&\begin{vmatrix} a^2x^2 - abxy - acxz & a^2y^2 + abxy & caxx + a^2z^2 \\ abxy + b^2x^2 & b^2y^2 - bcyz - abxy & b^2x^2 + bcyz \\ c^2x^2 + caxx & bcyz + c^2y^2 & c^2z^2 - caxx - bcyz \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{abcxyz} \times \\
&\begin{vmatrix} a^2(x^2 + y^2 + z^2) & a^2y^2 + abxy & caxx + a^2z^2 \\ b^2(x^2 + y^2 + z^2) & b^2y^2 - bcyz - abxy & b^2x^2 + bcyz \\ c^2(x^2 + y^2 + z^2) & bcyz + c^2y^2 & c^2z^2 - caxx - bcyz \end{vmatrix} \\
&\quad (C_1 + C_2 + C_3)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{abcxyz} (x^3 + y^3 + z^3) \times$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2y^3+abxy & axz+a^2z^2 \\ b^2 & b^2y^3-bcyz-abxy & b^2z^2+bcyz \\ c^2 & bcyz+c^2y^3 & c^2z^2-axz-bcyz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x^3+y^3+z^3}{abcxyz} \times$$

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & y^3(a^2+b^2+c^2) & z^3(a^2+b^2+c^2) \\ b^2 & b^2y^3-bcyz-abxy & b^2z^2+bcyz \\ c^2 & bcyz+c^2y^3 & c^2z^2-axz-bcyz \end{vmatrix} \\ (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= \frac{(x^3+y^3+z^3)(a^2+b^2+c^2)bcyz}{abcxyz} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ b & by-cz-ax & bz+cy \\ c & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(x^3+y^3+z^3)(a^2+b^2+c^2)}{ax} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -cz-ax & cx \\ c & bz & -ax-by \end{vmatrix} [C_2 - yC_1, \\ C_3 - zC_1]$$

$$= \frac{(x^3+y^3+z^3)(a^2+b^2+c^2)}{ax} \times$$

$$[a^2x^2+acxz+bcyz+abxy-bcyz]$$

$$= (x^3+y^3+z^3)(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)$$

பயிற்சி 1 (c)

கீழ்க்கண்ட அணிக்குறைவைகளின் மதிப்புக் காண்க.

$$1. \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 38 & 39 & 5 & 38 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} 21 & 17 & 7 & 10 \\ 24 & 28 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 7 & 18 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$5. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 + bad \\ 1 & b & b^2 & b^3 + cad \\ 1 & c & c^2 & c^3 + abd \\ 1 & d & d^2 & d^3 + abc \end{vmatrix} = 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$7. \text{ சுதந்திர அணிகள் } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$8. \begin{vmatrix} a^3+1 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^3 & b^3+1 & c^3 & d^3 \\ a^3 & b^3 & c^3+1 & d^3 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3+1 \end{vmatrix} = 1+a^3+b^3+c^3+d^3 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$9. \begin{vmatrix} x+a & x+2a & x+3a \\ x+2a & x+3a & x+4a \\ x+3a & x+4a & x+5a \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$10. \begin{vmatrix} x^3 & (x+1)^3 & (x+2)^3 & (x+3)^3 \\ (x+1)^3 & (x+2)^3 & (x+3)^3 & (x+4)^3 \\ (x+2)^3 & (x+3)^3 & (x+4)^3 & (x+5)^3 \\ (x+3)^3 & (x+4)^3 & (x+5)^3 & (x+6)^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$11. \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$12. \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

எனக் காட்டுக.

$$13. \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix}$$

எனக் கவ. 13க.

$$14. \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 \text{ என நிறுவ.}$$

$$15. \begin{vmatrix} 1+x & 8 & 8 & 4 \\ 1 & 8+x & 8 & 4 \\ 1 & 8 & 8+x & 4 \\ 1 & 8 & 8 & 4+x \end{vmatrix} = x^3 (x+10) \text{ என நிறுவ.}$$

$$16. \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவ.}$$

$$17. \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவ.}$$

18. A, B, C எண்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் எனில்

$$\begin{vmatrix} -\cos C & \sin C & \cos C \\ \sin 2A & 0 & \sin 2B \\ \sin (A-B) & \cos (A-B) & \sin (A+B) \end{vmatrix} = \sin 2C \text{ என நிறுவ.}$$

$$19. \begin{vmatrix} a^2 + \lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2 + \lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2 + \lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2 + \lambda \end{vmatrix}.$$

λ^4 ஆக விரிவாக விரிபடுக என நிறுவுக.

$$20. \begin{vmatrix} 1+x & 1+y & 1+z \\ x^2+x & y^2+y & z^2+z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

$= (x-y)(y-z)(z-x)$ எனக் காட்டுக.

$$21. \Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix},$$

x சரிபற்றறு என நிறுவுக. மேலும் a, b, c கூட்டுத் தொகையில் அமைந்தால் $\Delta = 0$ எனவும் நிறுவுக.

$$22. \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 2+x \\ 2 & 2+x & 4+x \\ 3 & 3+x & 6+x \end{vmatrix} = 12x \text{ என நிறுவுக.}$$

$$23. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d) \\ \{ (a-c)^2 + (b-d)^2 \} \text{ என நிறுவுக.}$$

$$24. \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$25. \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

ஒரு சமீபமான மூலம், என நிறுவுக.

$$26. \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

என நிறுவுக.

27. $2s = a+b+c$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^2(s-a)(s-b)(s-c) \text{ என நிறுவுக.}$$

28. $\lambda = \beta\gamma + \alpha\delta$, $\mu = \gamma\alpha + \beta\delta$, $\nu = \alpha\beta + \gamma\delta$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \end{vmatrix} = -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$$

என நிறுவுக.

29. $(a+b+c) = 0$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0\text{-ஐ நிரூபிக்க.}$$

$$80. \begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ -bc+ca+ab & bc-ca+ab & bc+ca-ab \\ (a+c)(a+b) & (a+b)(b+c) & (b+c)(c+a) \end{vmatrix} \\ = 9(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c) \times (ab+bc+ca) \\ \text{என நிறுவுக.}$$

81. a, b, c ஆகியவை வெவ்வேறு மதிப்பு உடையவையாகவும்

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3-1 \\ b & b^2 & b^3-1 \\ c & c^2 & c^3-1 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனவும் இருந்தால்}$$

$abc(ab+bc+ca) = a+b+c$ என நிறுவுக.

$$82. \begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & a+3b \\ a+3b & a & a+b & a+2b \\ a+2b & a+3b & a & (a+b) \\ a+b & a+2b & a+3b & a \end{vmatrix} \\ = -32b^3(2a+3b) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

$$83. \begin{vmatrix} x+2 & 0 & 1 \\ 2 & x+1 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$84. \begin{vmatrix} x-2 & 4 & 8 \\ x+3 & x & 1 \\ x-1 & x+1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$85. \begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = 0$$

$$36. \begin{vmatrix} a-x & b & c & d \\ a & b-x & c & d \\ a & b & c-x & d \\ a & b & c & d-x \end{vmatrix} = 0$$

$$37. \begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 \\ 2x+3 & 2 & 3 \\ 2x+4 & 15x+21 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$38. \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \text{ -ஐ மதிக்க}$$

மூலம்.

$$39. \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ (a-1)^2 & (b-1)^2 & (c-1)^2 \end{vmatrix}$$

= -4 (a-b)(a-c)(c-a) மூலம் காட்டு.

$$40. \begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \sin C & \cos C \\ -\cos A & \sin A & -\cos C & \sin C \\ -\sin C & \cos C & \sin A & -\cos A \\ -\cos C & -\sin C & \cos A & \sin A \end{vmatrix} = 4$$

மூலம் காட்டு.

$$41. \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = (n+x)x^{n-1}$$

மூலம் காட்டு.

$$42. \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2+x & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3+x & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+x \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1} \left[x + \frac{1}{2} n(n-1) \right] \text{ என } \underline{\text{பிழவுக.}}$$

$$43. \begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \dots & a+nb \\ a+nb & a & a+b & \dots & a+n-1b \\ a+n-1b & a+nb & a & \dots & a+n-2b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+b & a+2b & a+3b & \dots & a \end{vmatrix}$$

$$= (-b)^n (a+1)^n \cdot (a+\frac{1}{2}nb) \text{ என } \underline{\text{பிழவுக.}}$$

$$44. \begin{vmatrix} \sin^2 A & \sin A \cos A & \cos^2 A \\ \sin^2 B & \sin B \cos B & \cos^2 B \\ \sin^2 C & \sin C \cos C & \cos^2 C \end{vmatrix}$$

$$= \sin(A-B) \sin(A-C) \sin(B-C) \text{ என } \underline{\text{பிழவுக.}}$$

நிகழ்வு $A+B+C = \pi$

$$45. \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy) \text{ என } \underline{\text{பிழவுக.}}$$

1.12. 2-வா நிலையில் அமைந்த இரு அணிக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகை காணுதல் :

தேற்றம் 9 :

மூன்றாம் நிலைகள் அணிக் கோவைகள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகை மூன்றாம் நிலையிலமைந்த மத்ரீஸ் அணிக்கோவை ஆகும்.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ எனவும் } D' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

எனவும் கொள்க.

$\Delta =$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக்கோவைவையும் கருதுவோம். Δ ஐ 27 அணிக் கோவைகளின் கூடுதலாக எழுதலாம். ஏனெனில் Δ -ன் ஒவ்வொரு நிரலின் அமைந்த மூலக்களமும் 3 நிரல்களின் கூடுதலாக இருக்கின்றன. இந்த 27 அணிக்கோவைகளும் சான்றாக

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_1 & c_1\gamma_1 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_2 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_3 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_1 & b_1\beta_1 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_2 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_3 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

என்பவற்றைக் காட்டலாம். இவற்றை மூன்றையே

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

என எழுதலாம். இவற்றுள் முதல் அணிக்கோவைகளில் மூன்று நிரல்களுமே சமமாக இருப்பதால் அதன் மதிப்பு பூச்சியமாகும். மற்ற இரு அணிக்கோவைகளின் கூடுதல்

$$(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ஆகும். இதேபோன்று 27 அணிக்கோவைகளுள் 24 அணிக்கோவைகள் பூச்சியமாகும் என்று நாம் காணலாம். எஞ்சியுள்ள அணிக்கோவைகளின் கூடுதல்

$$(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3$$

$$+ \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1) \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{அதாவது} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $\Delta = D \cdot D'$

குறிப்பு :

இங்கு விளக்கப்பட்டத் தெரிப்பு பொதுவானது. எனவே இது எஆம் திற அணிக்கோவைகள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகைக்கும் பொருத்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix}$$

ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகை காண்டு $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$
 $(p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ என்று நிறுவுக.
 இங்கு A, B, C ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை a, b, c, p, q, r மூலம்
 காட்டிக. (செ.ப.க.)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a(a^2 - bc) - b(ca - b^2) + c(c^2 - ab) \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\text{இதேபோன்று } \begin{vmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix} = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr \text{ ஆகும்.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ap+bq+cr & ar+bp+cr & aq+br+cp \\ aq+br+cp & ap+bq+cr & ar+bp+cr \\ ar+bp+cr & aq+br+cp & ap+bq+cr \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix}$$

என எழுதலாம்.

$$\text{இங்கு } A = ap+bq+cr, B = ar+bp+cr, C = aq+br+cp$$

\therefore கொடுத்துள்ள ஆணிக்குவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{எனவும் } A_1, B_1, C_1 \text{ முறையே}$$

a_1, b_1, c_1 ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகளாகவும் இருந்தால்,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \Delta^2 \text{ என நிறுக்க.}$$

$$\text{இப்போது } \Delta \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \text{ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

இதன் மதிப்பு

$$= \begin{vmatrix} a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 & a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 & a_1 A_3 + b_1 B_3 + c_1 C_3 \\ a_2 A_1 + b_2 B_2 + c_2 C_1 & a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 & a_2 A_3 + b_2 B_3 + c_2 C_3 \\ a_3 A_1 + b_3 B_1 + c_3 C_1 & a_3 A_2 + b_3 B_2 + c_3 C_2 & a_3 A_3 + b_3 B_3 + c_3 C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} & [\text{ஏனெனில் } a_r A_r + b_r B_r + c_r C_r \\ & \quad = \Delta \text{ (} r=s \text{ எனில்)} \\ & \quad = 0 \text{ (} r \neq s \text{) எனில்)} \end{aligned}$$

$$= \Delta^3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{\Delta^3}{\Delta} = \Delta^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \text{ ஐ வர்க்கவெடுத்த வகை முறையில்,}$$

$$S_1 = x' + y' + z' \text{ எனில், } \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2$$

என நிறுவுக.

[செ. ப. க.]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

(ஏற்கெனவே நிறுவியிருக்கோம்.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+1+1 & x+y+z & x^2+y^2+z^2 \\ x+y+z & x^2+y^2+z^2 & x^3+y^3+z^3 \\ x^2+y^2+z^2 & x^3+y^3+z^3 & x^4+y^4+z^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

$$\text{எனவே, } \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = (x-y)^2 (y-z)^2 (z-x)^2$$

பயிற்சி 1 (d)

1. $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ இ நான்கு சரிபாண இருபடிகளின் கூட்டுத்தொகையாக எழுதலாம் என நிறுவுக.

$$2. \begin{vmatrix} 2bc & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$$

$= (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$ என நிறுவுக.

3. x, y, z, t ஐக் குறிக்கிறவெனில்,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ y & z & t & x \\ z & t & x & y \\ t & x & y & z \end{vmatrix} = [(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$4. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ -ஐ } A_1, B_1, C_1, \dots, \text{ முன்படியே } a_1, b_1, c_1, \dots$$

ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகள் எனில்,

$$\begin{vmatrix} B_1+C_1 & C_1+A_1 & A_1+B_1 \\ B_2+C_2 & C_2+A_2 & A_2+B_2 \\ B_3+C_3 & C_3+A_3 & A_3+B_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

என நிறுவுக.

$$5. \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$$

$= 4a^2b^2c^2$ என நிறுவுக.

$$6. \begin{vmatrix} a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \\ c^2-ab & a^2-bc & b^2-ca \\ b^2-ca & c^2-ab & a^2-bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}^2$$

என நிறுவுக.

7. A, B, C ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களாகவெனில்,

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக. இதிலிருந்து}$$

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$ எனக் காட்டுக.

8. $\begin{vmatrix} x & l & m & 1 \\ \alpha & x & n & 1 \\ \alpha & \beta & x & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}$ -ன் மதிப்பை,

இதை $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவை

புடன் பெருக்குவதன் மூலம் காண்க.

9. $\begin{vmatrix} (ax+1)^2 & (ay+1)^2 & (az+1)^2 \\ (bx+1)^2 & (by+1)^2 & (bz+1)^2 \\ (cx+1)^2 & (cy+1)^2 & (cz+1)^2 \end{vmatrix}$ ஐ

இரு அணிக்கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையாக அமைக்க. மேலும் இதன் மதிப்பு $2(a-b)(b-c)(c-a)(x-y)(y-z)(z-x)$ என நிறுவுக.

- 1.12. அணிக்கோவைகளை ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் தீர்வு காண்பதற்குப் பயன்படுத்துவதற்குக் கீழ்க் கண்ட சமன் பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ என இருக்கட்டும். இதில் } a_1, a_2, \dots$$

... ஆகியவற்றில் சிற்றணித் கோவைகள் முறையே A_1', A_2', A_3'
... .. ஆக இருக்கட்டும்.

$(1) \times A_1' - (2) \times A_2' + (3) \times A_3' \dots$ எடுத்தால்,
 $(a_1 A_1' - a_2 A_2' + a_3 A_3') x + (b_1 A_1' - b_2 A_2' + b_3 A_3') y$
 $+ (c_1 A_1' - c_2 A_2' + c_3 A_3') z = d_1 A_1' - d_2 A_2' + d_3 A_3'$
 ஆனால் $b_1 A_1' - b_2 A_2' + b_3 A_3' = c_1 A_1' - c_2 A_2' + c_3 A_3' = 0$

$$\therefore (a_1 A_1' - a_2 A_2' + a_3 A_3') x = d_1 A_1' - d_2 A_2' + d_3 A_3'$$

$$x = \frac{d_1 A_1' - d_2 A_2' + d_3 A_3'}{a_1 A_1' - a_2 A_2' + a_3 A_3'} \\ = \frac{[d_1 b_2 c_3]}{[a_1 b_2 c_1]}$$

$$\text{இதே போன்று} \quad y = \frac{[a_1 d_2 c_3]}{[a_1 b_2 c_3]}$$

$$z = \frac{[a_1 b_3 d_2]}{[a_1 b_3 c_2]}$$

கொடுக்கப்பட்ட x, y, z -ல் அமைத்த நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y, z ஐ நீக்குவதற்கும் அணிக்கோவைமையப் பயன்படுத்தலாம்.

$$a_1 x + b_1 y + c_1 x + d_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 x + d_2 = 0$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 x + d_3 = 0$$

$$a_4 x + b_4 y + c_4 x + d_4 = 0$$

கடைசி மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{x}{[b_3 c_3 d_4]} - \frac{-y}{[c_3 d_3 a_4]} = \frac{2}{[d_3 a_3 b_4]} = \frac{-1}{[a_3 b_3 c_4]}$$

x, y, z -ன் இம்மதிப்புக்களை மூலக் சமன்பாட்டில் பிரதிபிட்டு மூலமும் பொதுக் காரணியாகப் பெறுக.

$$\{a_1 [b_2 c_3 d_4] - b_1 [c_2 d_3 a_4] + c_1 [d_2 a_3 b_4] - d_1 [a_2 b_3 c_4]\} = 0.$$

அதாவது,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

இது x, y, z சம்பந்த கோவைவாகும். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலும் குணகங்களுக்கிடையேயுள்ள இது போன்ற அணிக் கோவை வழித் தொடர்பு நீக்கற்பவன் (eliminant) எனப்படும். இந்த வரிசை நிறைவு செய்யப்பட்டால் அது இசைவுடைமை (consistency) எனப்படும். அதாவது கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன என்கிறோம்.

$$\text{என்கருக, } x + 2y - z = -1$$

$$3x - y - 5z = 5$$

$$x - y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்,

இவற்றுள் எவையேனும் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் x, y, z -ன் மதிப்புகள் நான்காவது சமன்பாட்டிற்கும் பொருத்த வந்தால் சமன்பாடுகள் இசைவுடையன ஆகும். இங்கு மூலக் மூன்று சமன்பாடுகளினின்றும் $x = 2, y = -1, z = 1$ ஆகும். இம் மதிப்புகள் $x + y + z = 2$ ஐ நிறைவு செய்வதால் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் இசைவுடையன.

எடுத்துக்காட்டு 1:

அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

$$5x + 5y - 7z = 18$$

$$4x + y - 12z = 6$$

$$2x + 9y - 8z = 20$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 4 & 1 & -12 \\ 2 & 9 & -8 \end{vmatrix} \text{ என இருக்கிறது.}$$

$$= 3(-8 + 108) - 5(-12 + 24) - 7(36 - 2) \\ = 315 - 60 - 258 = 17$$

$$D \cdot x = \begin{vmatrix} 3x & 5 & -7 \\ 4x & 1 & -12 \\ 2x & 9 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3x + 5y & -7x & 5 & -7 \\ 4x + y & -12x & 1 & -12 \\ 2x + 9y & -8x & 9 & -8 \end{vmatrix} [C_1 + y C_2 + z C_3]$$

$$= \begin{vmatrix} 18 & 5 & -7 \\ 6 & 1 & -12 \\ 20 & 9 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 18(-8 + 108) - 5(-16 + 240) - 7(54 - 20) \\ = 1866 - 1110 - 228 = 17$$

$$\therefore x = \frac{17}{D} = 1.$$

$$\text{இருக்கலானால் } y = \begin{vmatrix} 3 & 18 & -7 \\ 4 & 5 & -12 \\ 2 & 20 & -8 \end{vmatrix} + D$$

$$= \frac{1}{17} [3(-18 + 240) - 18(-12 + 24) \\ - 7(80 - 12)]$$

$$= \frac{1}{17} \cdot 84 = 2.$$

$$\begin{aligned}
 z &= \begin{vmatrix} 8 & 5 & 18 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 20 \end{vmatrix} \div D \\
 &= \frac{1}{17} [8(20-54) - 5(80-12) + 18(38-2)] \\
 &= \frac{1}{17} [0] = 0.
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 1, y = 2, z = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலின்றும் x, y, z ஐத் தீர்க்க.

$$ax + y + z + 1 = 0$$

$$x + ay = 0$$

$$y + z = 0$$

$$x + y + z + a = 0$$

இவற்றின் தீர்மானம்

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $a(a-1) = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளில் d ஐக் காண்க.

$$x + y + z = d$$

$$ax + by + cz = d^2$$

$$a^2 x + b^2 y + c^2 z = d^3$$

$$x = \begin{vmatrix} d & 1 & 1 \\ a^2 & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= d \frac{(b-c)(c-d)(d-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= d \frac{(c-d)(d-b)}{(a-b)(c-a)}$$

இதே போல $y = \frac{d(d-c)(a-d)}{(b-c)(a-b)}$ எனவும்,

$z = \frac{d(d-a)(b-d)}{(b-c)(c-a)}$ எனவும் தீர்மானிக்க.

பயிற்சி 1 (a)

கீழ்க்கண்ட ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x + 2y + 5z = 28$

$3x + y + 4z = 26$

$6x + y + 7z = 47$

2. $5x - 6y + 4z = 15$

$7x + 4y - 3z = 19$

$2x + y + 6z = 46$

3. $x + y + z = 1$

$ax + by + cz = k$

$a^2x + b^2y + c^2z = k^2$

$$4. \quad x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0$$

$$5. \quad x + 2y + 3z = 11$$

$$2x - y + 4z = 13$$

$$3x + 4y - 5z = 8$$

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் இசைவுடையவையானிருக்க k -ன் மதிப்புக் காண்க :

$$6. \quad 2x + 3y + z + kw = 0$$

$$x + 2y - 4z - 6w = 0$$

$$2x + 5y - 2z + w = 0$$

$$3x + y - 3z - kw = 0$$

7. x, y, z ஆகியவை ஒரேயே பூச்சியமாக இல்லாவிடில்,

$$ax + cy + bz = 0$$

$$bx + ay + cz = 0$$

$cx + by + az = 0$ எனில், $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc = 0$ எனக் காட்டுக.

8. a -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்,

$$a^2x + (a+1)^2y + (a+2)^2z + (a+3)^2 = 0$$

$$(a+1)^2x + (a+2)^2y + (a+3)^2z + (a+4)^2 = 0$$

$$(a+2)^2x + (a+3)^2y + (a+4)^2z + (a+5)^2 = 0$$

$$(a+3)^2x + (a+4)^2y + (a+5)^2z + (a+6)^2 = 0$$

என்ற சமன்பாடுகள் இசைவுடையவா என நிறுவுக.

9. $x = \frac{a}{b-c}, y = \frac{b}{c-a}, z = \frac{c}{a-b}$ எனில்

$1 + yz + zx + xy = 0$ என நிறுவுக.

2. சமன்பாட்டுக் கொள்கை

2.1 வரையறைகள் :

சமன்பாடுகள், மூற்றெழுமைகள் : $f(x)$ ஐப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தும்போது x -ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு அது உண்மையானால் $f(x) = 0$ என்பது ஒரு சமன்பாடு எனப்படும். x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x) = 0$ எனில் $f(x) = 0$ ஒரு மூற்றெழுமைவாகும். (உ-ம்.) $x^2 - 2x + 2 = 0$ ஆனது $x = 1$, $x = 2$ என்ற மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே உண்மை ஆவதால் இது ஒரு சமன்பாடாகும். ஆனால் $x^2 - 2x + 2 - (x-1)^2 = 0$ ஒரு மூற்றெழுமை.

மூலம் : x -ன் எம்மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ பூச்சியமாகிறதோ அம்மதிப்புகள் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனப்படும்.

தீர்வுகள் : ஒரு சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் கண்டுவிடித்தல் சமன்பாட்டின் தீர்வு காரணத்தால் எனப்படும்.

அளவுக்கிணங்கிய சார்பு : $f(x)$ -ல், x -ன் படிகள் அளவுக்கிணங்கியவைவராக இருப்பின் $f(x)$ அளவுக்கிணங்கிய சார்பு எனப்படும்.

$$(உ-ம்.) x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 7x - \frac{4}{x^2}.$$

மூலச் சார்பு : $f(x)$ -ல் x -ன் அடுக்குக் குறிகள் கூட்டு முழு எண்ணாகவே இருப்பின், $f(x)$ மூலச் சார்பு எனப்படும்.

$$(உ-ம்.) a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \text{ அல்லது}$$

$$x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n \text{ என்பது}$$

n கூட்டு முழு எண்ணாகவும், $a_0, a_1, \dots, a_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ என்பவை x சார்பற்றனவாயும் இருக்கும்போது அளவுக்கிணங்கிய மூலச் சார்பு (rational integral function) எனப்படும்.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ என்பது x -ல் ஒரு n படிச் சமன்பாடாகும். இங்கு $a_n \neq 0$ எனக் கொள்ள வேண்டும். ஏனெனில் $a_n = 0$ எனில் சமன்பாட்டின்படி $(n-1)$ எடுத்துக்கிடும்.

2-2. அடிப்படைத் தேற்றம் :

1. ஒவ்வொரு விவிலிதமான மூலச்சார்பு சமன்பாட்டிற்கும் ஒரு தீர்வு உண்டு. இத் தீர்வு பெய்வெண்ணாகவோ அல்லது கற்பனை யாகவோ இருக்கலாம். இத்தேற்றத்தை இங்கு நிறுவாமலேயே ஏற்றுக்கொள்வோம்.

தேற்றம் 2 :

ஒவ்வொரு n படிச் சமன்பாட்டிற்கும் n தீர்வுகளே உள்ளன.

தெரியு : $f(x) = 0$, ஒரு n படிச் சமன்பாடென இருக்கட்டும். இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரு தீர்வு உண்டென எடுத்துக்கொண்ட அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி α_1 ஒரு தீர்வு எனக் கொள்வோம். எனவே $f(x)$, $(x-\alpha_1)$ ஆல் சரியாக வகுபடும்.

$\therefore f(x) = (x-\alpha_1) \phi_1(x)$ என எழுதலாம். இங்கு $\phi_1(x)$ x -ல் அமைத்த $(n-1)$ படி பல்லுறுப்புக் கோவை. எனவே $\phi_1(x) = 0$ ஒரு தீர்வு பெற்றிருக்கும். அது α_2 எனக் கொண்டால் $(x-\alpha_2) \phi_1(x)$ -ன் ஒரு காரணி.

$$\therefore \phi_1(x) = (x-\alpha_2) \phi_2(x),$$

$\phi_2(x)$, $(n-2)$ ஆம் படி பல்லுறுப்புக்கோவை.

$$\therefore f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \phi_2(x)$$

இவ்வாறே ஒவ்வொரு தீர்வுக்கும் உரிய காரணி கண்டால்

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n) \phi_n(x)$$

எனக் கிடைக்கும். $\phi_n(x)$ -ன் படி $(n-n) = 0$ ஆகும். அதாவது $\phi_n(x)$, x சார்பற்றது.

$$\therefore \phi_n(x) = k \text{ எனக் கொள்வ.}$$

$$\therefore f(x) = k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ எனக் கொண்டால் $k = 1$.

$$\therefore f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

எனவே $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்ற n மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே $f(x)$ பூச்சியமாவதால் $f(x) = 0$ க்கு n மூலங்களே உருளின. மேலும் x -ன் வேறெந்த மதிப்புகளுக்கும் $f(x) \neq 0$ என்பதும் தெளிவு.

ஆகையால், $f(x) = 0$ எனும் n படி சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்ற n மதிப்புகள் மட்டுமே ஆகும்.

குறிப்பு :

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ஆகியவை $f(x)=0$ -ன் மூலங்கள் எனில் $f(x) = A[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)] = 0$, A என்பது x சார்பற்றது.

(ii) $f(x)$ எனும் ஒரு n படி பல்லுறுப்புக்கோவை x -ன் n -க்கு மேற்பட்ட மதிப்புகளுக்கு பூச்சியமானால், $f(x)$ முற்றிலும் பூச்சியத் தித்தூச் சமனாகும்.

(iii) $f(x) = 0$ -ன் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்ற n தீர்வுகளில் r தீர்வுகள் α -க்குச் சமமானால், $f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x)$; $\phi(x)$ என்பது $(n-r)$ படிச் கோவையாகும். α என்பது $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் r மூறை மடங்குத் தீர்வு (r multiple root) எனப்படும்.

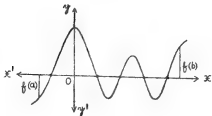
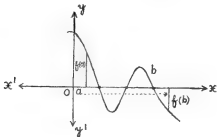
2-4. தேற்றம் 3 :

$f(a), f(b)$ மாற்றுக் குறியீடுகள் பெற்றிருப்பின், a, b ஆகிய வந்திந்திடைகளில் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒன்றைப் படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் தீர்வுகள் இருக்கும். (குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வேனும் இருக்கும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்டிருப்பின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை ஒன்றைப்படையாக இருக்கும்).

தேர்ப்பு :

$f(x)$ என்ற கோவை x -ல் ஒரு தொடர்புடைய சார்பு (continuous function) ஆகும். எனவே a, b -க்கு இடைப்பட்ட x -ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $f(x), f(a), f(b)$ -க்கு இடைப்பட்ட ஒவ்வொரு மதிப்பையும் ஏற்கும். ஆனால் $f(a), f(b)$ ஆகியவை மாற்றுக் குறியீடு பெற்றிருப்பதால் பூச்சியம் இவ்வந்திந்திடையிலுள்ள ஒரு மதிப்பாகும். அதாவது a, b -க்கு இடையிலுள்ள

x -ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பிற்கேனும் $f(x)$ பூச்சியமாகிறது. x -ன் இம்மதிப்பு $f(x) = 0$ -ன் மூலமாகும். இத்தேற்றத்தை $y=f(x)$ -ன் காரைபடம் மூலமாகவும் திருவகலாம்.

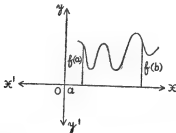
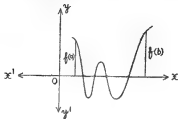


படம் 1

2.5. தேற்றம் 4 :

$f(a), f(b)$ ஒரே குறியீடு பெற்றிருப்பின் a, b -இடைத்தித் திட்டத்தில் $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இரட்டைப் மடமட எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் தீர்வுகள் இருக்கும். $[a, b$ -க்கு இடைத்தில் $f(x) = 0$ -க்குத் தீர்வுகளே இல்லாமலும் அமைவதால்.]

ஏனெனில் இரு புள்ளிகளை ஒரு வளைவரைவால் இணக்கும் போது இப்புள்ளிகள் x அச்சின் ஒரே பக்கத்தில் இருந்தால் வளைவரையின் இப்புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள பகுதி x அச்சை வெட்டு மீட்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாகவே அல்லது பூச்சியமாகவே இருக்கலாம்.



படம் 2

2-0 தேற்றம் 5 :

ஒர் ஒற்றைப்படைப் படி சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு மெய்யெண் தீர்வெனும் உண்டு.

தெரிப்பு :

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ (n ஒற்றைப் படை தேர் முழு எண்) என்பது சமன்பாடு.

$$f(-\infty) = -\infty \quad (\because n \text{ ஒற்றைப்படை எண்})$$

$$f(0) = p_n \quad (p_n, x \text{ சார்பற்றது})$$

$$f(+\infty) = +\infty$$

எனவே, p_n நேர் மதிப்புடையதாயின் $f(x) = 0$ -க்கு $-\infty, p_n$ ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு மூலம் உண்டு. p_n எதிர் மதிப்புடையதாயின் $p_n, +\infty$ ஆகியவற்றிற்கிடையில் $f(x) = 0$ -க்கு ஒரு மூலமாகவு உண்டது.

குறிப்பு :

ஒற்றைப்படைப் படி சமன்பாட்டின் மாநில உறுப்பு கூட்டு எண்ணாகும், குறைந்தது ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும், மாநில உறுப்பு குறையெண்ணாகும், குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும், $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு உண்டு.

2-7. தேற்றம் 6 :

ஒர் இரட்டைப்படைப் படி சமன்பாட்டில் மாநில உறுப்பு குறை யெண்ணாகும், சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய்யெண் தீர்வும் குறைந்தது ஒரு குறை மெய்யெண் தீர்வும் உண்டு.

தெரிப்பு :

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ (n இரட்டைப் படை எண்) என்ற சமன்பாட்டில் p_n குறை மதிப்புடையதாக இருக்கட்டும்.

$$f(-\infty) = +\infty \quad (\because n \text{ இரட்டைப்படை எண்})$$

$$f(0) = p_n = \text{குறை மதிப்பு}$$

$$f(+\infty) = +\infty$$

எனவே, $-\infty, 0$ ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தீர்வும், $0, +\infty$ ஆகியவற்றிற்கிடையே ஒரு தீர்வும் $f(x) = 0$ -க்கு உண்டு.

குறிப்பு :

மாநில உறுப்பு கூட்டு மதிப்புடையதாயின் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் தீர்வே இல்லாமலும் போகலாம்; அல்லது மெய்யெண் தீர்வுகள் இருபதின் அவற்றின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படை யாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x_1, x_2 \dots x_n$ என்பவை $(a_1-x)(a_2-x) \dots (a_n-x) + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $a_1, a_2 \dots a_n$ என்பவை $(x_1-x)(x_2-x) \dots (x_n-x) - k = 0$ -ன் மூலங்கள் எனத் திருவுக.

x_1, x_2, \dots, x_n ஆகியவை $(a_1-x)(a_2-x) \dots (a_n-x) + k = 0$ -ன் மூலங்கள்.

எனவே,

$$(a_1-x)(a_2-x) \dots (a_n-x) + k = (x_1-x)(x_2-x) \dots (x_n-x)$$

$$\therefore (x_1-x)(x_2-x) \dots (x_n-x) - k = (a_1-x)(a_2-x) \dots (a_n-x)$$

$$\therefore a_1, a_2 \dots a_n \text{ ஆகியவை } (x_1-x)(x_2-x) \dots (x_n-x) - k = 0\text{-ன் மூலங்களாகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ என்பவை $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \dots = (1-p_1+p_2-p_3+\dots)^2 + (p_1-p_2+\dots)^2 \text{ எனத் திருவுக.}$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$ என்பவை $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ -ன் மூலங்கள் ஆதலால்,

$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_n = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \dots$ இதன் இருபுறமும் மூன்றாவே $i, -i$ என அடுத்தடுத்துப் பிரதியிட்டு இரண்டையும் பெருக்கினால்

$$(i-\alpha)(i-\beta)(i-\gamma) \dots (-i-\alpha)(-i-\beta) \dots = (i^n + p_1i^{n-1} + \dots + p_n) \{(-i)^n + p_1(-i)^{n-1} + \dots + p_n\}$$

அதாவது,

$$\begin{aligned} & (\alpha-i)(\alpha+i)(\beta-i)(\beta+i) \dots \\ & = i^n [(1-p_1+p_2-\dots) - i(p_1-p_2+\dots)] \\ & (\times i^n) [(1-p_1+p_2-\dots) + i(p_1-p_2+\dots)] \end{aligned}$$

$$\therefore (\alpha^2+1)(\beta^2+1)(\gamma^2+1) \dots = [(1-p_1+p_2-p_3+\dots)^2 + (p_1-p_2+\dots)^2]$$

பயிற்சி 2 (a)

1. $x^3 + 3px + q$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரு காரணி $x^3 - 3qx + p^2$ என்ற அமைப்பில் இருந்தால் $q^3 + 4p^3 = 0$ என நிறுவுக.
2. $px^3 + qx + r$ என்ற மூப்படி பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு ஒரு காரணி $x^3 + ax + 1$ என்ற அமைப்பில் இருந்தால், $(p^3 - r^3)(p^3 - r^3 + qr) = p^3 q^3$ என நிறுவுக.
3. $x^4 + px^3 = rx + s^2$ ஒரு நிறை வர்க்கமானால் (perfect square) $px = \pm r$, $p^3 + 8r = 0$ என நிறுவுக.
4. L, B, Y என்பன $(x+a)(x+b)(x+c) = d$ -ன் தீர்வுகளாகில், a, b, c என்பன $(x+L)(x+B)(x+Y) = d$ -ன் தீர்வுகளெனக் காண்க.
5. a, b, c என்பவைகள் கூட்டுெண்களாகில்,

$$\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(x-c)} = \frac{1}{x}$$
 -ன் தீர்வுகள் மெய்யெண்கள் என்று நிரூபி.
6. $x^3 - px + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டை $(x^3 + mx + n)^3 = x^4$ என்ற அமைப்பில் கொண்டால், p, q என்பவற்றிடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.
7. a, b, c என்பவைகள் மெய்யெண்களாக இருப்பின்,

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{8}{x}$$
 என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளும் மெய்யானவை என்று நிரூபி.
8. $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 17x + 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு 5 ஒரு தீர்வானால், மற்ற 3 தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.
9. 1, 7 என்பன $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால், மற்ற இரண்டு தீர்வுகளையும் கண்டுபிடி.
10. $-\frac{3}{2}, 3, \frac{1}{7}$ இம் தீர்வுகளாக உடைய சமன்பாடு காண்க.

2.8. தேற்றம் 7 :

மெய்யெண் கெழுக்களை உடைய சமன்பாட்டில் கற்பனை மூலங்கள் துணையாகக் கற்பனை எண்களாகத் தோன்றும்.

தெரிவு : $f(x) = 0$ சமன்பாடாகவும், இதில் $\alpha + i\beta$ ஒரு கற்பனை மூலமாகவும் இருக்கட்டும்.

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

$f(x)$ ஐ $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ ஆல் வகுத்தால், எவு $Q(x)$ எனவும் மீதி $Ax + B$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= [(x - \alpha)^2 + \beta^2] Q(x) + Ax + B \\ &= (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) Q(x) + Ax + B \end{aligned}$$

$x = \alpha + i\beta$ என இதில் பிரதியிட,

$$\begin{aligned} f(\alpha + i\beta) &= [\alpha + i\beta - \alpha - i\beta][\alpha + i\beta - \alpha + i\beta] \\ &\quad Q(\alpha + i\beta) + A(\alpha + i\beta) + B \\ &= A(\alpha + i\beta) + B \end{aligned}$$

ஆனால் $(\alpha + i\beta), f(x) = 0$ -ன் தீர்வு ஆதலால் $f(\alpha + i\beta) = 0$

$$\therefore A(\alpha + i\beta) + B = 0$$

மெய்யெண் பகுதியையும், கற்பனை எண் பகுதியையும் தனித் தனியே சமன்படுத்தினால்,

$$A\alpha + B = 0$$

$$A\beta = 0$$

$$\beta \neq 0, \text{ எனவே } A = 0$$

$$\therefore B = 0$$

$$\therefore f(x) = (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) Q(x)$$

எனவே, $(\alpha - i\beta)$ -உம் $f(x)$ -ன் ஒரு மூலமாகும்.

2.9. தேற்றம் 8 :

அளவுக்கீணக்கிய கெழுக்களை உடைய சமன்பாட்டின், இருபடி மூலத் தீர்வுகள் துணையாக மூலங்களாகவே தோன்றும் (In an equation with rational coefficients, the roots which are quadratic surds occur in conjugate pairs).

இ. உ. - 15

தேசியு: $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $a + \sqrt{b}$ ஒரு தீர்வாகக் கொள்வோம். இங்கு, a, b ஆகியவை அளவுக்கணக்கிய எண்கள், \sqrt{b} இரூபடி மூலம்; b வர்க்க எண் ஆகிய.

$$(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b}) = (x-a)^2 - b$$

$f(x)$ ஐ $\{(x-a)^2 - b\}$ ஆல் வகுத்தால் கவு $Q(x)$ எனவும், மீத $Ax + B$ எனவும் இருக்கட்டும். இங்கு A, B எல்பன எலிதழறு எண்கள்,

$$\therefore f(x) = \{(x-a)^2 - b\} Q(x) + Ax + B$$

இதில் $x=a+\sqrt{b}$ எனல் மீததில்,

$$\begin{aligned} f(a+\sqrt{b}) &= [(a+\sqrt{b}-a)^2 - b] Q(a+\sqrt{b}) + A(a+\sqrt{b}) + B \\ &= A(a+\sqrt{b}) + B \end{aligned}$$

$(1+\sqrt{b}), f(x)=0$ -ல் ஒரு மூலம் ஆதலால் $f(a+\sqrt{b}) = 0$

$$\therefore A(a+\sqrt{b}) + B = 0,$$

$$\therefore Ax + B = 0$$

$$A\sqrt{b} = 0$$

$$\sqrt{b} \neq 0 \text{ ஆதலில் } A = 0$$

$$\therefore B = 0$$

எனவே, $f(x) = [(x-a)^2 - b] Q(x)$

$$= (x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b}) Q(x)$$

$\therefore f(x) = 0$ -ல் ஒரு தீர்வு $a+\sqrt{b}$ எனில் $a-\sqrt{b}$ -ல் ஒரு தீர்வு எல்று கிடைக்கிதறு.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^4 - x^3 + 8x^2 - 8x - 16 = 0$ -ல் மூலங்களுல் இரண்டு, $\sqrt{8}, 1-2i$ எனில், சமன்பாட்டில் தீர்வு காண்க.

சமன்பாட்டில் கெழுக்கள் அளவுக்கணக்கிய பெல்பென்கள் ஆதலால் $1+2i, \sqrt{8}$ ஆகியவைல் சமன்பாட்டில் மூலம் களாதல் வேண்டும்.

$\therefore x^3 - x^2 - 8x + 8 = 0$ ஆனது $(x - \sqrt{8})$, $(x + \sqrt{8})$, $(x - 1 + 2i)$, $(x - 1 - 2i)$ ஆகியவற்றால் மீதிலின்றி வகுபடவேண்டும்.

அதாவது, $(x^2 - 8)$, $[(x - 1)^2 + 4]$ ஆகியவை $(x^3 - x^2 + 8x - 8x - 16) = 0$ -ன் காரணிகள்.

$$\therefore (x^3 - x^2 + 8x - 8x - 16) = (x^2 - 8)(x^2 - 2x + 8)(x + 1).$$

\therefore கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் ஐந்தாவது மூலம் $x = -1$.

\therefore சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\pm \sqrt{8}$, $1 \pm 2i$, -1 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் $1 + \sqrt{5}$ எனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$(1 + \sqrt{5})$ ஒரு மூலம் ஆதலின் $(1 + \sqrt{5})$ மற்றொரு மூலமாகும்.

இம்மூலங்களுக்கு மீற காரணிகள் $(x - 1 - \sqrt{5})$, $(x - 1 + \sqrt{5})$

எனவே $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8$ ஐ $\{(x - 1)^2 - 5\}$ அதாவது $(x^2 - 2x - 4)$ ஆல் வகுத்தால் வரும் சவு $(x^2 - 8x + 2)$.

$$\therefore x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = (x^2 - 8x + 2)(x^2 - 2x - 4)$$

\therefore கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மற்ற மூலங்கள் 2, 1 ஆகும்.

\therefore சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $1 \pm \sqrt{5}$, 1, 2.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$8x^3 - 4x^2 + x + 88 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் $2 + \sqrt{-7}$ எனில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$2 + \sqrt{-7}$ ஒரு மூலம். எனவே $(2 + \sqrt{-7})$ -ன் ஒரு மூலமாகும். இம்மூலங்களுக்குரிய காரணிகள் $(x - 2 + \sqrt{-7})$, $(x - 2 - \sqrt{-7})$.

எனவே,

$$\begin{aligned}(8x^3 - 4x^2 + x + 88) &= [(x-2)^2 + 7] [8x + 8] \\ &= (x^2 - 4x + 11) (8x + 8)\end{aligned}$$

எனவே சமன்பாட்டின் மூன்றாவது மூலம் $= \frac{8}{8}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \frac{C^2}{x-c} + \dots + \frac{L^2}{x-l} = x-m$$

[$a, b, c \dots l$ ஒன்றையொன்று மீறாத பட்ட மதிப்புடையவை] என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் மெய்யெண் மதிப்புடையவை என நிரூபிக்க.

முடியுமென்றால் $\alpha + i\beta$ (α, β மெய்யெண்கள்) சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாக இருக்கட்டும். எனவே $(\alpha - i\beta)$ மற்றொரு மூலமாகும்.

$$\begin{aligned}\therefore \frac{A^2}{(\alpha-a)+i\beta} + \frac{B^2}{(\alpha-b)+i\beta} + \frac{C^2}{(\alpha-c)+i\beta} \\ + \dots + \frac{L^2}{(\alpha-l)+i\beta} = (\alpha+i\beta-m) \quad \dots (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A^2}{(\alpha-a)-i\beta} + \frac{B^2}{(\alpha-b)-i\beta} + \dots + \frac{L^2}{(\alpha-l)-i\beta} \\ = (\alpha-m)-i\beta \quad \dots \dots (2)\end{aligned}$$

(2) இங்குந்து (1) ஐக் கழிக்க

$$2i\beta \left[\frac{A^2}{(\alpha-a)^2 + \beta^2} + \frac{B^2}{(\alpha-b)^2 + \beta^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{L^2}{(\alpha-l)^2 + \beta^2} \right] = -2i\beta$$

$$\begin{aligned}\therefore 2i\beta \left[\frac{A^2}{(\alpha-a)^2 + \beta^2} + \frac{B^2}{(\alpha-b)^2 + \beta^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{L^2}{(\alpha-l)^2 + \beta^2} + 1 \right] = 0\end{aligned}$$

அடைப்புக் குறிகளுள் அமைந்துள்ள கட்டாயம் கூட்டு மதிப்புடையது. எனவே அது பூச்சியமாக முடியாது. எனவே, $\beta = 0$.

அதாவது கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்குத் கற்பனை மூலங்களே இருக்க முடியாது.

பயிற்சி 2 (b)

1. $2 - \sqrt{10}$ என்பது $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 28x - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வானால் மற்றத் தீர்வுகளாகக் காண்டு விட.
2. கீழே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளில் ஏதேனும் ஒரு தீர்வு கொடுக்கப்பட்டால் மற்றத் தீர்வு களாகக் காண்க.

சமன்பாடு	ஏதேனும் ஒரு தீர்வு
(a) $2x^4 - 11x^3 + 17x^2 - 10x + 2 = 0$.	$2 + \sqrt{-2}$
(b) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 7x + 8 = 0$.	$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{6})$
(c) $6x^5 - 59x^4 + 208x^3 - 358x^2 + 388x^2 + 174x + 86 = 0$	$2 + \sqrt{-2}$.
(d) $x^5 - x^4 + 8x^3 - 9x - 16 = 0$.	$-\sqrt{-8}$
(e) $8x^5 - 4x^4 - 48x^3 + 56x^2 + 27x - 86 = 0$.	$\sqrt{-2} + \sqrt{-6}$
(f) $2x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 27x + 51 = 0$.	$\sqrt{-2} - i$
(g) $2x^4 - 17x^3 + 38x^2 + 170x - 100 = 0$.	$6 + 6i$
(h) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 8x + 2 = 0$.	$1 + i$
(i) $8x^5 - 4x^4 + x + 88 = 0$.	$2 + i\sqrt{-7}$
(j) $x^4 - 4x^3 + 8x + 86 = 0$.	$2 + i\sqrt{-8}$.

3. a, b, c, \dots, k ஆகியவைகள் ஒன்றாகவொன்று வித்தியாசமானவை. $\frac{a^2}{x-a} + \frac{b^2}{x-b} + \frac{c^2}{x-c} + \dots + \frac{k^2}{x-k} = x-m$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு கற்பனைவாக இருக்க முடியாது என்று காட்டு.

2-10. ஒரு சமன்பாட்டின் கொடுக்கலுக்கும் அதன் மூலம் கருக்குமிடையே அமைந்த தொடர்புகள்

$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$
என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என இருக்கட்டும்.

$$\begin{aligned}\therefore x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \\ &\quad \dots (x - \alpha_n) \\ &= x^n - x^{n-1}(\sum \alpha_i) + (\sum \alpha_i \alpha_j)x^{n-2} + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \\ &= x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n S_n\end{aligned}$$

என எழுதியும் S_i என்பது $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ஆகியவற்றில் i , i தீர்வுகளாகப் பெருக்கி, கூட்டிய தொகையைக் குறிக்கும். (அதாவது $S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$; $S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n$ உறுப்புகள்) இருபுறமும் சமன்பாடுகளின் கொடுக்களை ஒப்பிட,

$$\begin{aligned}p_1 &= -S_1 & \therefore S_1 &= -p_1 \\ p_2 &= S_2 \\ p_3 &= -S_3 & \therefore S_3 &= -p_3 \\ \dots &\dots \dots \\ p_r &= (-1)^r S_r & \therefore S_r &= (-1)^r p_r \\ p_n &= (-1)^n S_n & \therefore S_n &= (-1)^n p_n\end{aligned}$$

மேற்குறித்த சமன்பாடு

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், முழுவதும் a_0 ஆல் வகுக்கச் சமன்பாடு,

$$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0}x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0} = 0$$

என்றாகிறது.

$$\therefore \sum \alpha_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$S_2 = \sum \alpha_i \alpha_j = \frac{a_2}{a_0}$$

$$S_3 = \sum \alpha_i \alpha_j \alpha_k = -\frac{a_3}{a_0}$$

... ..

$$S_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

இந்த n சமன்பாடுகள் டட்டும் லைத்து ஒரு சமன்பாட்டின் லுண் களைக் காணுதல் என்பது கடினம். ஆனால் இலையகலாத வேறு ஒரு தொடர்பு லுண்களுக்குக்கிடையே கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் இக்குக் குறித்துள்ள n சமன்பாடுகளில் கடறி கொண்டு லுண் களைச் சில சமயங்களில் எளிதில் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 7x^2 + 88 = 0$ -ன் ஒரு லுண் மத்தொரு லுண்த்தைப் போன்று இரு மடங்கு எவில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

லுண்களை α , β , γ எனக் கொண்டால்,

$$\alpha + \beta + \gamma = 7$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$$

$$\alpha\beta\gamma = -88$$

ஆனால், $\beta = 8\alpha$ (என்க)

$$\therefore 8\alpha + \gamma = 7 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$8\alpha^2\gamma = -88 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$8\alpha^3 + 2\alpha\gamma + \gamma\alpha = 0$$

$$\text{அதாவது, } 8\alpha^3 + 8\alpha\gamma = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(1), (3) இலிருந்து,

$$8\alpha^3 + 8\alpha(7 - 8\alpha) = 0$$

$$\text{அதாவது, } \alpha = 0, \quad \alpha = 8$$

$$\therefore \gamma = 7, \quad \gamma = 1$$

ஆனால், $\alpha = 0, \quad \gamma = 7$ (3)ஐ திறவு செய்வதில்லை. அதாவது, $\alpha = 8, \quad \gamma = 1$ என்ற மதிப்புகளை டட்டுமே கொள்ள வேண்டும். $\therefore \beta = 8$.

\therefore சமன்பாட்டின் லுண்கள் 1, 8, 8.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் லுண்கள் $\beta + \gamma = \alpha + 8$ எனத் தொடர்பில் அமைத்திருப்பின் அதற்கான திபத்தினைவைக் காண்க.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ சமன்பாட்டின் மூலங்களெனில்,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -p \quad \dots \quad (1)$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta = q \quad \dots \quad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta = -r \quad \dots \quad (3)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta = s \quad \dots \quad (4)$$

$$\text{மேலும்,} \quad \beta + \gamma = \alpha + \delta \quad \dots \quad (5)$$

(1), (5)-இவற்றிலிருந்து

$$\beta + \gamma = \alpha + \delta = -\frac{p}{2} \quad \dots \quad (6)$$

(3) இலிருந்து $(\alpha + \delta)(\beta\gamma + (\beta + \gamma)\alpha\delta) = -r$

அதாவது $(\beta + \gamma)(\beta\gamma + \alpha\delta) = -r$

$$\therefore \beta\gamma + \alpha\delta = \frac{2r}{p} \quad \dots \quad (7)$$

(2) இலிருந்து,

$$(\beta + \gamma)(\alpha + \delta) + \alpha\delta + \beta\gamma = q$$

$$\text{அதாவது,} \left(-\frac{p}{2}\right)\left(-\frac{p}{2}\right) + \frac{2r}{p} = q$$

[(6), (7)-இவற்றிலிருந்து]

$$\therefore \frac{p^2}{4} + \frac{2r}{p} = q$$

$$\text{அல்லது} \quad p^2 - 4pq + 8r = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ -ன் மூலங்கள்

(i) கூட்டுத் தொடரில் அமைவ,

(ii) பெருக்குத் தொடரில் அமைவ,

(iii) இசைத் தொடரில் அமைவ, நிபந்தனைகள் என்ன ?

[\therefore சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $a, d, m, a+d$ என இருக்கட்டும்.

$$\therefore a - d + a + d = 2a = p \quad \dots \quad (1)$$

$$(a-d)a + a(a+d) + a^3 - d^3 = q$$

$$\text{அதாவது,} \quad 3a^3 - d^3 = q \quad \dots \quad (2)$$

$$a(a^3 - d^3) = r \quad \dots \quad (3)$$

$$(1), (3) \text{ இவற்றுக்கு } a^3 - d^3 = \frac{3r}{p} \quad \dots \quad (4)$$

(2) இவற்றுக்கு (4) ஐக் கழிக்க,

$$3a^3 = q - \frac{3r}{p}$$

$$\text{அதாவது } 27 \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3 = q - \frac{3r}{p}$$

$$\therefore 2p^3 = 27q - 27r$$

$$\text{அல்லது } 2p^3 - 27q + 27r = 0$$

(ii) $\frac{a}{r_1}$, a , ar_1 -இவை சமன்பாட்டின் மூலங்களெனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{a}{r_1} + a + ar_1 = p, \text{ அதாவது } \frac{a(1+r_1+r_1^2)}{r_1} = p \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{a^3}{r_1} + a^3 r_1 + a^3 = q, \text{ அதாவது } \frac{a^3(1+r_1+r_1^2)}{r_1} = q \quad \dots \quad (2)$$

$$a^3 = r \quad \dots \quad (3)$$

$$(2) \text{ ஐ } (1) \text{ ஆல் வகுக்க } a = \frac{q}{p}$$

$$\therefore (3) \text{ இவற்றுக்கு } \left(\frac{q}{p}\right)^3 = r$$

$$\therefore q^3 = p^3 r.$$

(iii) $\frac{1}{a-d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d}$ மூலங்களென இருக்கட்டும்,

$$\therefore \frac{1}{a-d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} = p$$

$$\frac{1}{a(a-d)} + \frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{a^2-d^2} = q$$

$$\frac{1}{a(a^2-d^2)} = r.$$

$$\therefore a(a^2-d^2) = \frac{1}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{3a}{a(a^2-d^2)} = q \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{3(a^2-d^2)}{a(a^2-d^2)} = p \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(1), (3) இங்குத்து $(3a^2-d^2)r = p$

$$\therefore 3a^2-d^2 = \frac{p}{r}$$

$$\frac{a^2-d^2}{3} = \frac{q}{q}$$

$$\therefore 2a^2 = \left(\frac{p}{r} - \frac{8}{q} \right) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

ஆனால் (1), (2) இங்குத்து,

$$3a = q(a^2-d^2)a$$

$$= q \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{r}$$

\therefore (4)-ல் a -ஐ மதிப்பிடும் போது,

$$2 \left(\frac{q}{3r} \right)^2 = \left(\frac{pq-8r}{qr} \right)$$

$$\therefore 2q^2r = (8pq-87r^2)r$$

$$2q^2 - 8pq + 87r^2 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ -ன் மூலங்கள்

(i) கூட்டுத்தொடரில் அமைப்ப,

(ii) பெருக்குத் தொடரில் அமைப்ப,

(iii) எல்லாம் சமமாயிருக்க,

(iv) மூன்று சமமாயிருக்க,

(v) இரண்டிரண்டாகச் சமமாயிருக்க,

(vi) இரண்டு சமமையும் மூன்றுக்குறியையும் பெற்றிருக்க, நிபந்தனைகள் என்ன?

(i) மூலங்களை $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \therefore a - 3d + a - d + a + d + a + 3d \\ = 4a = -p \end{aligned} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (a - 3d)(a - d) + (a - 3d)(a + d) + (a - 3d)(a + 3d) \\ + (a - d)(a + d) + (a - d)(a + 3d) \\ + (a + d)(a + 3d) = q \end{aligned}$$

$$\text{அதாவது, } 6a^2 - 10d^2 = q \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (a - 3d)(a^2 - d^2) + (a^2 - d^2)(a + 3d) + (a - d)(a^2 - 9d^2) \\ + (a + d)(a^2 - 9d^2) = -r \end{aligned}$$

$$\text{அதாவது } 4a(a^2 - 6d^2) = -r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$(a^2 - d^2)(a^2 - 9d^2) = s \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$(1) \text{ இலிருந்து } a = -\frac{p}{4}$$

$$(1), (2) \text{ இலிருந்து } a^2 - 6d^2 = +\frac{r}{p}$$

$$\underline{6a^2 - 10d^2 = q}$$

$$\therefore 4a^2 = q - \frac{2r}{p}$$

$$\therefore 4 \left(\frac{p^2}{16} \right) = \frac{pq - 2r}{p}$$

$$\therefore p^2 - 4pq + 8r = 0$$

(2), (4) இங்குத்து

$$\left(a^2 - \frac{6a^2 - q}{10} \right) \left(a^2 - 9 \cdot \frac{6a^2 - q}{10} \right) = 1$$

$$\text{அதாவது } (4a^2 + q)(9q - 44a^2) = 100a^2$$

$$\text{ie., } \left[4 \cdot \frac{p^2}{16} + q \right] \left[9q - 44 \cdot \frac{p^2}{16} \right] = 100a^2$$

$$\left. \begin{aligned} (p^2 + 4q)(9q - 11p^2) &= 1600a^2 \\ p^2 - 4pq + 8r &= 0 \end{aligned} \right\}$$

இவையே நேரடியான சிபந்திமைக் கூறுகள்.

(ii) $\frac{a}{d^2} + \frac{a}{d} + ad, ad^2$ -இயற்கணித மூலங்களாகக் கொள்ள.

$$\therefore a \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d} + d + d^2 \right) = -p \quad \dots \quad (1)$$

$$a^2 \left(\frac{1}{d^2} + 1 + d^2 + 1 + \frac{1}{d^2} + d^2 \right) = -q \quad \dots \quad (2)$$

$$a^3 \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d} + d^2 + d \right) = -r \quad \dots \quad (3)$$

$$a^4 = 1 \quad \dots \quad (4)$$

(2) + (1) எடுக்க,

$$a^2 = \frac{r}{p}$$

$$\therefore (4)\text{-ல் இதைப் பிரதியிட } \frac{r^2}{p^2} = 1$$

$$\therefore r^2 = p^2 \cdot 1 \text{ - இது ஒரு சிபந்திமை.}$$

(1), (2), (3) இலிருந்து a, d ஐ நீக்குவதன் மூலம் மற்ற நியத நினைவைக் கரணவாம்.

இதற்கு $d + \frac{1}{d} = t$ எனப் பிரதிபலிடுவோம்.

$$\therefore d^2 + \frac{1}{d^2} = t^2 - 2$$

$$d^2 + \frac{1}{d^2} = t^2 - 2t$$

$$d^2 + \frac{1}{d^2} = t^2 - 4t^2 + 2.$$

$$\therefore (t^2 - 2t + t) = -\frac{p}{a}$$

$$t^2 - 2t + \frac{p}{a} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$(t^2 - 4t^2 + 2 + t^2 - 2t + 2) = \frac{q}{a^2}$$

$$t^2 - 2t^2 + 2 = \frac{pq}{r} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(5), (6) இலிருந்து

$$\begin{cases} (t^2 - 2t^2 + \frac{p}{a}) t = 0 \\ t^2 + \left(\frac{pq}{r} - 2 \right) + \frac{pt}{a} = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

மறுபடியும் (5), (7) இலிருந்து

$$-\frac{p}{a} + \frac{p}{a} t^2 + \frac{pq}{r} t = 0$$

$$\text{அதாவது, } \frac{t^2}{a} + \frac{qt}{r} - \frac{1}{a} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

(7), (8) இலிருந்து,

$$-\frac{p}{a^2} + \frac{2q}{r} - \frac{pq^2}{r^2} = -\frac{2}{a} + \frac{pq}{ra} + \frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{p}{a^2}$$

$$\therefore \left[\frac{1}{a} \left(\frac{pq}{r} - 1 \right) \right]^2 = \left(\frac{q}{r} - \frac{p}{a^2} \right) \left(\frac{2q}{r} - \frac{pq^2}{r^2} - \frac{p}{a^2} \right)$$

$$\text{அதாவது } \frac{1}{a^2 r^2} (pq - r)^2 = \left(\frac{q}{r} - \frac{p}{a^2} \right) \left(\frac{2q}{r} - \frac{pq^2}{r^2} - \frac{p}{a^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{r^2} (pq - r)^2 &= \frac{1}{r^2} (q - p^2) (2qr - pq^2 - p^2 r) \\ &\left(\because \frac{1}{a^2} = \frac{p}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(pq - r)^2 &= \\ &= (p^3 - q)(pq^2 + p^2 r - 2qr) \\ &= r(p^3 - q)^2 + (pq^2 - qr)(p^2 - q) \\ &= r(p^3 - q)^2 + q(pq - r)(p^2 - q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore r(p^3 - q)^2 &= (pq - r)[p^2 q - pr - q(p^2 + q)] \\ &= (pq - r)(q^2 - pr) \end{aligned}$$

$$r(p^3 - q)^2 = (pq - r)(q^2 - pr)$$

இது இரண்டாவது சமன்பாடு.

(iii) நான்கு மூலங்களும் α என இருக்கட்டும்.

$$\therefore 4\alpha = -p \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$6\alpha^2 = q \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$4\alpha^3 = -r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\alpha^4 = s \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$(1), (2) \text{ இலிருந்து } \frac{p^2}{16} = \frac{q}{6} \quad \text{அதாவது } 6q = 8p^2 \quad \dots \quad (I)$$

$$(1), (3) \text{ இலிருந்து } -\frac{p^3}{16} = -r \quad \therefore p^3 = 16r \quad \dots \quad (II)$$

$$(1), (4) \text{ இலிருந்து } \frac{p^4}{256} = s \quad \therefore p^4 = 256s \quad (III)$$

(iv) இங்கு மூலங்கள் α , α , α , β என இருக்கட்டும்.

$$3\alpha + \beta = -p \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$3\alpha^2 + 3\alpha\beta = q \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\alpha^2 + 3\alpha^2\beta = -r \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\alpha^3\beta = s \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$\beta = -p - 3\alpha$ என (2), (3)-ல் பிரதியிட,

$$3\alpha^2 - 3p\alpha - 3\alpha^2 = q$$

$$\text{அதாவது } 3\alpha^2 + 3p\alpha + q = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$\alpha^2 - 3p\alpha^2 - 3\alpha^3 = -r$$

$$\text{அதாவது } 3\alpha^2 + 3p\alpha^2 - r = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(5), (6) இலிருந்து,

$$\frac{\alpha^2}{3pr - 4q^2} = \frac{\alpha}{3pq - 18r} = \frac{1}{24q - 9p^2}$$

$$\therefore 9(pq - 6r)^2 = (3pr - 4q^2)(8q - 9p^2) \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

இது மூலம் திபத்தின்.

அடுத்து,

$\alpha^3\beta = s$ என்பதில் $\beta = -p - 3\alpha$ எனப் பிரதியிட,

$$3\alpha^2 + p\alpha^2 + s = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

$$3\alpha^2 + 3p\alpha^2 - r = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (9)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருத்தும் கிடைப்பது

$$p\alpha^2 - 3\alpha r - 3s = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (10)$$

மறுபடியும் (5), (6) இலிருந்து

$$3p^2\alpha^2 + (pq + 18r)\alpha + 48s = 0 \quad \dots \quad (10)$$

$$3\alpha^2 + 3pr + q = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருத்தும்,

$$\frac{\alpha^2}{q(pq+18r)-144prx} = \frac{\alpha}{288s-8p^2q} = \frac{1}{8p^2r-6(qq+18r)}$$

$$\therefore 8(28s-p^2q)^2 = (pq^2+18qr-144prx)(8p^2r-2pq-28r) \quad (II)$$

இது இயற்கணித நிபந்தனையாகும்.

(v) சமன்பாட்டின் மூலங்களாக α, β ; β, β எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore 2(\alpha+\beta) = -p \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta = q \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$2(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = -r \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\alpha^2\beta^2 = s \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(2) இலிருந்து,

$$2\alpha\beta(\alpha+\beta) = -r$$

$$\text{அதாவது} \quad \alpha\beta = \frac{r}{p} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

(2) இலிருந்து,

$$(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta = q$$

$$\text{அதாவது,} \quad \frac{p^2}{4} + \frac{2r}{p} = q$$

$$\therefore p^3 + 8r = 4pq \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

(4), (5) இலிருந்து,

$$\frac{r^2}{p^2} = s$$

$$r^2 = sp^2 \quad \dots \quad \dots \quad (II)$$

I, II இவை தேவைவாயான நிபந்தனைகளாகும்.

(vi) இம்முச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக $\alpha, -\alpha, \beta, \gamma$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \beta+\gamma = -p \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$-\alpha_1 + \beta\gamma = q \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$-\alpha^2 \beta - \alpha^2 \gamma = -r \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$-\alpha^2 \beta \gamma = s \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(1), (3) இலிருந்து,

$$\alpha^2 (-p) = r$$

$$\therefore \alpha^2 = -\frac{r}{p} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

இதை (4)-ல் பிரதியிட,

$$\beta \gamma = \frac{ps}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

(5), (6)-இவற்றை (2)-ல் பயன்படுத்திக் கிடைப்பது,

$$\frac{r}{p} + \frac{ps}{r} = q$$

$$\therefore r^2 + p^2 s = pqr \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

பயிற்சி 2 (௮)

1. $x^3 - 5x^2 - 16x + 84 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமானால், தீர்வுகள் காண்க.
2. $x^3 - 8x^2 + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரண்டு தீர்வுகள் சமமானால் தீர்வுகளைக் காண்க.
3. $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகளுக்கு உள்ள விகிதம் 3 : 2 எனின் தீர்வுகள் காண்க.
4. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளானால், $\beta + \gamma = \alpha + \delta$ என்றால் $p^3 - 4pq + 8r = 0$ எனக் காட்டுக.
5. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பவை $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள். $\alpha\beta - \gamma\delta$ ஆனால் $p^3 s - r^3 = 0$ என நிறுவுக.
6. $x^3 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு தீர்வு மற்றொரு தீர்வைப்போல் இரு மடங்காவின், $348r^3 + 36q^3 = 0$ என்று காட்டு.

இ.க.-16

7. $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 13x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $2\beta + 3\alpha = 7$ என்றும் அச்சமன்பாட்டில் தீர்வுகளைக் காண்க.
8. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் இரு தீர்வுகள் அளவில் சமமாவதும், குதியில் மாறுபட்டும் இருப்பின் தீர்வுகளைக் காண்க.
9. $ax^3 + 3bx^2 + 6cx + d = 0$ -ன் இரண்டு தீர்வுகள் சமமானால், அவைகள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{2} \frac{bc-ad}{ac-b^2}$ -க்குச் சமமாகும்.
10. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் இரண்டு தீர்வுகளின் பெருக்குத் தொகை மூன்றாவது தீர்வுக்குச் சமமானால், $r(1-p)^2 + (q-r)^2 = 0$ என்று காட்டு.
11. $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 9x - 15 = 0$ -ன் இரண்டு தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை மற்ற இரண்டு தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.
12. $x^3 + ax + b = 0$ -ன் ஒரு தீர்வு மற்ற இரண்டு தீர்வுகளின் வித்தியாசத்தைப்போல் இரு மடக்காகின். ஒரு தீர்வு $\frac{18b}{8a}$ எனக் காட்டு.
13. $2x^4 - 15x^3 - 25x^2 + 124x + 96 = 0$ -ன் இரண்டு தீர்வுகளின் வித்தியாசம் 6 என்றும், தீர்வுகளைக் காண்க.
14. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ -ல் இரண்டு தீர்வுகளின் பெருக்குத்தொகை '1' ஆனால் தீர்வுகளைக் காண்க.
15. $x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + c = 0$ -ன் மூன்று தீர்வுகள் சமமாக இருப்பின், $3a^2 = 4b$, $27a^4 + 16c = 0$ என்று நிறுவுக.
16. $6x^3 - 11x^2 - 8x + 2 = 0$ -ன் தீர்வுகள் இசைத் தொடரில் இருப்பின், தீர்வுகளைக் காண்க.
17. $x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0$ -ன் தீர்வுகள் இசைத் தொடரின் இருக்குமானால், $2b^3 = c(3ab - c)$ என்று நிறுவுக.
18. $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ -ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானால், k -ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து, தீர்வுகளைக் காண்க.

19. $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ -ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருந்தால், தீர்வுகளைக் காண்க.

20. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40 = 0$ -ன் தீர்வுகள் கூட்டுத் தொடரில் இருக்குமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.

21. $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ -ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.

22. $8x^4 - 40x^3 + 180x^2 - 120x + 27 = 0$ -ன் தீர்வுகள் பெருக்குத் தொடரில் இருக்குமானால், தீர்வுகளைக் காண்க.

2.11. சமன்பாட்டின் மூலங்களையான சமச்சீர் சார்புகள் (Symmetric functions of the roots)

மூலங்களையான சமச்சீர் சார்பென்பது, தீர்வுகள் அனைத்தையும் கொண்டதாகவும், அவற்றில் சமச்சீர் உடையதாகவும் அமைந்த சார்புகளைக் குறிக்கும்.

(உ-ம்.) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் கொள்வோம்.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$ என்பவை $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -ல் அமைந்த சில சமச்சீர் சார்புகள்.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்பவை $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ -ன் மூலங்கள் எனில்,

$$\Sigma \alpha_1 = -p_1$$

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 = p_2$$

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -p_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n p_n.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -ல் அமைந்த எந்தச் சமச்சீர் சார்பையும், p_1, p_2, \dots, p_n மூலமாக எழுதலாம்.

$$(i) \sum \alpha_1 = -p_1$$

$$(ii) \sum \alpha_1^2 = (\sum \alpha_1)^2 - 2\sum \alpha_1 \alpha_2 \\ = p_1^2 - 2p_2$$

$$(iii) \sum \alpha_1^3 \alpha_2$$

$\sum \alpha_1^3 \alpha_2$ காண்பதற்கு $(\sum \alpha_1, \sum \alpha_1 \alpha_2)$ -ன் மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் விரிவில் இருவிதமான உறுப்புகள் இருக்கும். $\alpha_1^3 \alpha_2$ என்பது போன்ற உறுப்புகள்: $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ என்பது போன்ற உறுப்புகள். முதல் வகையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு தடவை மட்டும் வரும். ஆனால் இரண்டாவது வகையை எடுத்துக்கொண்டால், சான்ற $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ என்ற உறுப்பு $\sum \alpha_1$ -ல் உள்ள α_1 , $\sum \alpha_1 \alpha_2$ -ல் உள்ள $\alpha_1 \alpha_2$ -ன் பெருக்குத் தொகையாகவும், இதேபோன்று $\sum \alpha_1$ -ல் உள்ள α_1 , $\sum \alpha_1 \alpha_2$ -ல் உள்ள $\alpha_1 \alpha_2$ -ன் பெருக்குத் தொகையாகவும், $\sum \alpha_1$ -ல் உள்ள α_1 , $\sum \alpha_1 \alpha_2$ -ல் உள்ள $\alpha_1 \alpha_2$ -ன் பெருக்குத் தொகையாகவும், இவ்வாறு மூன்று தடவை வருகிறது. எனவே இரண்டாவது வகையிலுள்ள உறுப்பு ஒவ்வொன்றும் மூன்று மறை வருகிறது.

$$\therefore \sum \alpha_1^3 \alpha_2 = \sum \alpha_1^3 \alpha_2 + 3\sum \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

$$\sum \alpha_1^3 \alpha_2 = (\sum \alpha_1)(\sum \alpha_1 \alpha_2) - 3\sum \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ = (-p_1)p_2 - 3(-p_3) \\ = 3p_3 - p_1 p_2$$

$$\text{பொதுவாக } \sum \alpha_1^3 \alpha_2 \dots \alpha_r = (\sum \alpha_1)(\sum \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r) \\ - (r+1)\sum \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \alpha_{r+1} \\ = (-p_1)(-1)^r p_r - (r+1)(-1)^{r+1} p_{r+1}$$

(iv) $\sum \alpha_1^4$ -இதற்கு $(\sum \alpha_1)(\sum \alpha_1^3)$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் விரிவில் α_1^4 என்பது போன்ற உறுப்புகளும் $\alpha_2 \alpha_1^3$ என்பது போன்ற உறுப்புகளும் இருக்கும். முதல் வகையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரே ஒரு மறைவும், இரண்டாவது வகையில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரே ஒரு வகையும்தான் வரும்.

$$\therefore \sum \alpha_1^4 = (\sum \alpha_1)(\sum \alpha_1^3) - \sum \alpha_1^3 \alpha_2 \\ = (-p_1)(p_1^2 - 2p_2) - (3p_3 - p_1 p_2) \\ = 3p_1 p_2 - p_1^3 - 3p_3$$

இதே முறையில் மூலங்கள் அமைந்த சமச்சீர் சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றிற்கும் மதிப்புக்களைக் கெழுக்கன் மூலம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

d_1, d_2, \dots, d_r என்பவை $\sum_{r=0}^n p_r x^r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலக்கோவைகளை $\mathbb{Z}[d_1^2, \mathbb{Z}[d_1^2, d_2^2, \dots, d_r^2]$ -ல் மதிப்பிடுதல் காண்க. (கே.ய.க.)

$$d_1, d_2, \dots, d_r \text{ இவை } p_0 x^r + p_1 x^{r-1} + \dots + p_r = 0$$

$$\therefore \mathbb{Z}[d_r] = -\frac{p_1}{p_0} \mathbb{Z}[d_r, d_r] = \frac{p_1}{p_0}$$

$$\mathbb{Z}[d_r^2] = (\mathbb{Z}[d_r])^2 = 2 \mathbb{Z}[d_r, d_r] = \frac{p_1^2}{p_0^2} = \frac{2p_1}{p_0} = \frac{p_1^2 - 2p_0 p_1}{p_0^2}$$

$$\mathbb{Z}[d_r^2, d_1^2] = (\mathbb{Z}[d_r, d_1])^2 = 2 \mathbb{Z}[d_r^2, d_1, d_1] = 2 \mathbb{Z}[d_r, d_1, d_1, d_1]$$

$$\begin{aligned} \text{ஆகவே, } \mathbb{Z}[d_r^2, d_1, d_1] &= (\mathbb{Z}[d_r])(\mathbb{Z}[d_r, d_1, d_1]) = 4 \mathbb{Z}[d_r, d_1, d_1, d_1] \\ &= \left(-\frac{p_1}{p_0}\right) \left(-\frac{p_1}{p_0}\right) = \frac{4p_1^2}{p_0^2} = \frac{p_1 p_0 - 4p_0^2 p_1}{p_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \mathbb{Z}[d_r^2, d_1^2] &= \frac{p_1^2}{p_0^2} = 2 \frac{(p_1 p_0 - 4p_0^2 p_1)}{p_0^2} = 2 \frac{p_1}{p_0} \\ &= \frac{p_1^2 - 2p_0 p_1 + 2p_0^2 p_1}{p_0^2} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\text{ஆகவே } \mathbb{Z}[d_r^2] = (\mathbb{Z}[d_r^2])^2 = 2 \mathbb{Z}[d_r^2, d_r^2]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[d_r^2] &= \frac{(p_1^2 - 2p_0 p_1)^2}{p_0^4} = 2 \frac{p_1^2 - 2p_0 p_1 + 2p_0^2 p_1}{p_0^4} \\ &= \frac{1}{p_0^4} [p_1^4 - 4p_0 p_1^3 p_1 + 2p_0^2 p_1^2 + 4p_0^3 p_1 p_0 - 4p_0^4 p_1] \\ &\dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பவை $x^3 - 5x + 7 = 0$ -ல் மூலக்கோவைகளை $\mathbb{Z} \frac{\alpha^3 - \beta\gamma}{\beta + \gamma}$ -ல் மதிப்பிடுதல் காண்க.

$$\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha^2 - \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}}{\alpha + \beta + \gamma - \alpha} = \frac{\alpha^2 + 7}{0 - \alpha}$$

$$(\because \alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -7)$$

$$= \frac{\alpha^2 + 7}{-\alpha} = \frac{5\alpha}{-\alpha} = -\frac{5}{1}$$

$$(\text{ஏனெனில் } \alpha^2 - 5\alpha + 7 = 0)$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\beta + \gamma} = -\frac{5}{\alpha}$$

$$\therefore \sum \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\beta + \gamma} = -5 \times \frac{1}{\alpha}$$

$$= -5 \left[\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \right]$$

$$= \frac{-5(-5)}{-7} = -\frac{25}{7}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$p+q+r=8$; $p^2+q^2+r^2=5$; $p^3+q^3+r^3=7$; எனில் p, q, r ஐ ஒலங்களைக் கொட்டி எடுக்கச் செய்யும் p, q, r களைக், $p^2+q^2+r^2=5$ என தீர்வுக. (செ.ப.க).

p, q, r ஐ ஒலங்களைக் கொட்டுவதால்

$$(x-p)(x-q)(x-r) = 0$$

$$\text{அதாவது, } x^3 - (p+q+r)x^2 + (pq+qr+rp)x - pqr = 0$$

$$p+q+r=8$$

$$p^2+q^2+r^2=5$$

$$p^3+q^3+r^3=7$$

$$\therefore (p+q+r)^2 - (p^2+q^2+r^2) = 2(pq+qr+rp)$$

$$= 8-5 = 3$$

$$\therefore pq+qr+rp = \frac{3}{2}$$

$$(p+q+r)(p^2+q^2+r^2) = p^3+q^3+r^3 + 3p^2q$$

$$\text{மேலும் } (p+q+r)(pq+qr+rp) = 3p^2q + 3pqr$$

$$\therefore 15 = 7 + 3p^2q$$

$$3p^2q = 8$$

$$\therefore 3pqr = 8 \cdot 8 - 8 = -8$$

$$\therefore \text{கூட்டுப்பெட்ட சமன்பாடு}$$

$$x^3 - 8x^2 + 2x + \frac{8}{3} = 0.$$

$$\text{மேலும் } (3pq)^2 = 3p^2q^2 + 3pqr(p+q+r)$$

$$4 = 3p^2q^2 - \frac{4}{3} \cdot 8$$

$$\therefore 3p^2q^2 = 8$$

$$p^3+q^3+r^3 = (3p^2)^2 - 2 \cdot 3p^2q^2 = 25 - 16 = 9$$

2.12 சமன்பாட்டின் மூலங்களின் படிக்களின் கூட்டுத்தொகை கண்டுபிடிக்க (Sum of the powers of the roots of an equation)

$f(x) = 0$ என்ற n -படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ எனக் கொண்டால் இவற்றை ' r ' படிக்கு உயர்த்தி, அவற்றின் கூடுதலை, அதாவது $\alpha_1^r + \alpha_2^r + \dots + \alpha_n^r$ இ் S_r எனக் குறிப்பிடுகோம். S_r , சமன்பாட்டின் மூலங்களாவன சமச்சீர்க்கோவை. எனவே S_r -ன் மதிப்பை இதற்கு முன் குறித்த வினக் கத்தின்படி காணலாம். ஆனால் $r > 4$ என வரும்போது இம் முறை சற்றுக் கடினமாக அமையும். ஆதலால், r -ன் பெரிய மதிப்பு களுக்கு S_r -ன் மதிப்பைப் பின்வரும் இரு தேற்றங்களை ஒன்றும் பெறலாம்.

தேற்றம் 9 :

$f(x)$ -ன் ' r ' படி கொண்ட தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகையான S_r -ன் மதிப்பு $\frac{x f'(x)}{f(x)}$ -ன் விரிவில் x^{-r} -ன் கெழுவிடத்துச் சமமாகும்.

தெரிப்பு: $f(x) = 0$ -ன் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ஆதலால், $f(x) = K(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n)$, K ஒரு மாறிலி.

இருபுறமும் மடக்கை (இயக்கிதம்) எடுத்து x ஐப் பொறுத்த வரைக் கொடுக்கின்றாக,

$$\begin{aligned}
 \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \frac{1}{x-a_3} + \dots + \frac{1}{x-a_n} \\
 \therefore \frac{xf'(x)}{f(x)} &= \frac{x}{x-a_1} + \frac{x}{x-a_2} + \frac{x}{x-a_3} + \dots + \frac{x}{x-a_n} \\
 &= \frac{1}{1-\frac{a_1}{x}} + \left(1-\frac{a_2}{x}\right) + \frac{1}{\left(1-\frac{a_3}{x}\right)} \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{\left(1-\frac{a_n}{x}\right)} \\
 &= \left(1-\frac{a_1}{x}\right)^{-1} + \left(1-\frac{a_2}{x}\right)^{-1} + \dots \\
 &\quad + \left(1-\frac{a_n}{x}\right)^{-1} \\
 &= 1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_1^2}{x^2} + \dots + \frac{a_1^n}{x^n} + \dots \dots \\
 &\quad + 1 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_2^2}{x^2} + \dots + \frac{a_2^n}{x^n} + \dots \dots \\
 &\quad + \dots \dots \dots \dots \\
 &\quad + 1 + \frac{a_n}{x} + \frac{a_n^2}{x^2} + \dots + \frac{a_n^n}{x^n} + \dots \dots \\
 &= n + (2a_1) \frac{1}{x} + (2a_1^2) \frac{1}{x^2} + (2a_1^3) \frac{1}{x^3} \\
 &\quad + \dots + (2a_1^n) \frac{1}{x^n} + \dots \dots \\
 &= n + S_1 \frac{1}{x} + S_2 \frac{1}{x^2} + \dots + S_r \frac{1}{x^r} + \dots \dots
 \end{aligned}$$

$\therefore S_r = \frac{xf'(x)}{f(x)}$ -ஐ விரிவில் x^{-r} -ஐ கொடுக்கிறது.

2-13. தீர்வுகளைக் காண்க:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ -ன் மூலங்களாகவும், $S_r = \alpha_1^r + \alpha_2^r + \dots + \alpha_n^r$ எனவும் இருக்கலாம்.

(i) $r < n$ என இருக்கும்போது

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots + p_r S_0 = 0$$

(ii) $r > n$ என இருக்கும்போது

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \dots + p_n S_{r-n} = 0.$$

கோணம்: $f(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ எனக் கொள்ளலாம். இதில் $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட்டு இரு புறமும் y^n -ஆல் பெருக்க.

$$\begin{aligned} y^n f\left(\frac{1}{y}\right) &= y^n k \left(\frac{1}{y} - \alpha_1\right) \left(\frac{1}{y} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{1}{y} - \alpha_n\right) \\ &= k(1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y) \dots (1 - \alpha_n y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y^n f\left(\frac{1}{y}\right) &= y^n \left[\frac{1}{y^n} + p_1 \frac{1}{y^{n-1}} + p_2 \frac{1}{y^{n-2}} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_{n-1}}{y} + p_n \right] \\ &= [1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n \\ &= k(1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y) \dots (1 - \alpha_n y) \end{aligned}$$

இருபுறமும் மூலக்கை எடுத்து y ஐப் பொறுத்த வரைக் கொடுக்கலாம்.

$$\begin{aligned} \frac{p_1 + 2p_2 y + 3p_3 y^2 + \dots + np_n y^{n-1}}{1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_n y^n} &= \frac{-\alpha_1}{1 - \alpha_1 y} \\ &\quad - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2 y} - \dots - \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n y} \\ &= -2 \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1 y} \\ &= -2(\alpha_1 + \alpha_1^2 y + \alpha_1^3 y^2 + \dots \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -[(x\alpha_1) + (x\alpha_1^2)y + (x\alpha_1^3)y^2 + \dots \\
&\quad \dots + (x\alpha_1^r)y^{r-1} + \dots \text{ ம வரை}] \\
&= -S_1 - S_2y - S_3y^2 - \dots - S_ry^{r-1} - \dots \text{ ம வரை} \\
\therefore (p_1 + 2p_2y + 3p_3y^2 + \dots + rp_ry^{r-1}) \\
&= (1 + p_1y + p_2y^2 + \dots + p_ry^r) \\
&\quad (-S_1 - S_2y - S_3y^2 - \dots \text{ ம வரை})
\end{aligned}$$

இருபுறமும் மீதில் எண்ணையும் y -ன் சமம் படிகளின் கெழுக்களையும் ஒத்திட்டால்,

$$p_1 = -S_1 \quad \therefore p_1 + S_1 = 0$$

$$2p_2 = -p_1S_1 - S_2 \quad \therefore S_2 + p_1S_1 + 2p_2 = 0$$

$$3p_3 = -p_2S_1 - p_1S_2 - S_3 \quad \therefore S_3 + p_1S_2 + p_2S_1 - 3p_3 = 0$$

பொதுவாக $r < n$ எனில்,

$$S_r + p_1S_{r-1} + p_2S_{r-2} + \dots + rp_ry^{r-1} = 0$$

$r \geq n$ எனில்,

$S_r + p_1S_{r-1} + p_2S_{r-2} + \dots + p_nS_{r-n} = 0$ எனவும் பெறப்படும். இவ்வாறு திறவியுள்ள சமம் பாடுகளிலிருந்து S_1, S_2, \dots, S_r என்பவற்றின் மதிப்புகளைப் படிப்படியாகப் பெறலாம்.

இணைதேற்றம்

$-r \log(1 + p_1y + p_2y^2 + \dots + p_ry^r)$ -ன் விரிவில் y^r -ன் கெழு S_r -ன் மதிப்பாகும்.

தெரிப்பு : திட்டமிடின் தேற்றத்தை திறவுகனையில்

$$\begin{aligned}
y^r f\left(\frac{1}{y}\right) &= 1 + p_1y + p_2y^2 + \dots + p_ry^r \\
&= k(1 - \alpha_1y)(1 - \alpha_2y) \dots (1 - \alpha_ry)
\end{aligned}$$

எனக் கண்டோம். எனவே இரு புறமும் மடக்கை (இலாகரிதம்) எடுத்தல் மடக்கை (இலாகரிதம்)த் தொடர் வரிசையைப் பயன்படுத்தினால்,

$$\begin{aligned}
\log(1 + p_1y + p_2y^2 + \dots + p_ry^r) \\
= \log k + \sum \log(1 - \alpha_iy)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \log k + x - \left(\alpha_1 y + \frac{\alpha_1^2 y^2}{2} + \frac{\alpha_1^3 y^3}{3} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha_1^r y^r}{r} + \dots \right) \\
 &= \log k - S_1 y - \frac{S_2 y^2}{2} - \frac{S_3 y^3}{3} - \dots - \frac{S_r y^r}{r} - \dots
 \end{aligned}$$

இது யுரோம் y -ன் கெழுக்களை ஒட்டி,

$$\frac{-S_r}{r} = \log(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_r y^r) \text{-ன் விரிவில்}$$

y -ன் கெழு.

$\therefore S_r = -r [\log(1 + p_1 y + p_2 y^2 + \dots + p_r y^r)]$ -ன் விரிவில் y -ன் கெழு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ -ன் மூலங்களின் தரக் கவது படிவனின் கூடுதல் காண்க. (செ.ப.க.)

வழக்கமான குறியீட்டின்படி

$$p_1 = -10, p_2 = 35, p_3 = -50, p_4 = 24.$$

$$\therefore S_1 - 10 = 0 \quad \therefore S_1 = 10$$

$$S_2 - 10S_1 + 70 = 0 \quad S_2 = 80$$

$$S_3 - 10S_2 + 35S_1 - 150 = 0$$

$$\therefore S_3 = 800 - 850 + 150 = 100$$

$$S_4 + p_1 S_3 + p_2 S_2 + p_3 S_1 + p_4 = 0$$

$$S_4 - 1000 + 1050 - 500 + 24 = 0$$

$$S_4 = 426$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3 + 8x + 9 = 0$ -ன் மூலங்களின் 9 ஆவது படிவனின் கூடுதல் பூச்சியமாகும் என நிரூபி. (செ.ப.க.)

α, β, γ என்பவை $x^3 + 8x + 9 = 0$ -ன் மூலங்களெனில்

$\alpha^9 + \beta^9 + \gamma^9 = -9 \log \left[y^3 \left(\frac{1}{y^3} + \frac{8}{y} + 9 \right) \right]$ -ன் விரிவில் y^9 -ன் கெழு

$$= -9 \times (\log(1 + 3y^2 + 9y^4) \text{-ன் விரிவில் } y^2 \text{-ன் கெழு})$$

$$\begin{aligned} \log(1 + 3y^2 + 9y^4) &= 3y^2 + 9y^4 - \frac{1}{2} (3y^2 + 9y^4)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} (3y^2 + 9y^4)^3 - \frac{1}{4} (3y^2 + 9y^4)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{இதில் } y^2 \text{-ன் கெழு} &= \frac{1}{3} \cdot 9^1 - \frac{1}{4} (4 \cdot 9^2 \cdot 9) = 3 \cdot 9^1 \\ &\quad - 9 \cdot 9^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$a + b + c + d = 0 \quad a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 0 \quad \text{எனில்}$$

$$8 \Sigma a^6 = (\Sigma a^4)(\Sigma a^4) = 4abcd \Sigma ab \quad \text{என நினைவுக. (செ.ப.க.)}$$

a, b, c, d ஐ மூலக்கணக்கக் கொண்ட சமன்பாட்டை $x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4 = 0$ என்க.

$$\therefore s_1 = -p_1 = 0 \quad (\text{கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.})$$

$$s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0 \quad \therefore s_2 = -2p_2$$

$$s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0 \quad \text{ஆனால் } S_3 = 0 \quad (\text{கொள்கைப்படி})$$

$$\therefore p_3 = 0.$$

$\therefore s_4 + p_1 s_3 + p_2 s_2 + p_3 s_1 + 4p_4 = 0$ என்பத சமன்பாட்டாக

$$s_4 - 2p_2^2 + 4p_4 = 0 \quad \therefore s_4 = 2p_2^2 - 4p_4$$

$$\text{எடுத்து } s_1 + p_1 s_4 + p_2 s_3 + p_3 s_2 + p_4 s_1 = 0$$

$$\therefore s_5 = 0$$

$$s_5 + p_1 s_4 + p_2 s_3 + p_3 s_2 + p_4 s_1 = 0$$

$$s_5 + p_2 (2p_2^2 - 4p_4) - 2p_2 p_4 = 0.$$

$$s_5 = -2p_2^3 + 4p_2 p_4$$

$$s_5 = -2p_2^3$$

$$s_5 = 2p_2^3 - 4p_4$$

$$\therefore x_1 x_4 = -4p_1^3 + 5p_2 p_4$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_1 x_4 &= 12p_1 p_4 - 4p_1^3 + 4p_1^3 - 5p_2 p_4 \\ &= 4p_1 p_4 \end{aligned}$$

$$\text{சமன்பாட்டிலிருந்து } 2ab = p_1 \quad abcd = p_4$$

$$\therefore 2x_1 - x_1 x_4 = 4abcd (2ab)$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$2x^4 - x + 8 = 0$ -ன் மூலங்களின் 12 ஆவது மடக்கின் கூடுதல் காண்க.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ - இவை சமன்பாட்டின் மூலங்களாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore 2x^4 - x + 8 = 2(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

மூலவாழம் 2 ஆக வரும் $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதிபலித்து, இம் y^4 ஆக பெருக்க,

$$1 - \frac{1}{2} y^8 + \frac{8}{2} y^4 = (1 - \alpha_1 y)(1 - \alpha_2 y)(1 - \alpha_3 y)(1 - \alpha_4 y)$$

$$\begin{aligned} \therefore \log [1 - \frac{1}{2} y^8 (1 - 8y)] &= \log (1 - \alpha_1 y) + \log (1 - \alpha_2 y) \\ &\quad + \log (1 - \alpha_3 y) + \log (1 - \alpha_4 y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} y^8 (1 - 8y) + \frac{1}{2} \frac{y^8 (1 - 8y)^2}{2^2} + \frac{1}{8} \frac{y^8 (1 - 8y)^3}{2^3} \\ + \frac{1}{4} \frac{y^{12} (1 - 8y)^4}{2^4} + \dots \dots \end{aligned}$$

$$= S_1 y + \frac{1}{2} S_2 y^2 + \frac{1}{8} S_3 y^3 + \dots \dots$$

y^{12} -ன் கெழுக்கெனச் சமன்படுத்த,

$$\frac{1}{12} S_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{8} \frac{(-8)^4}{2^4} = \frac{1}{64} - \frac{8}{8} = -\frac{71}{64}$$

$$\therefore S_{12} = -\frac{213}{16}.$$

வினா 2 (d)

1. α, β, γ எல்லாம் $x^3 - px^2 + qx + r = 0$ -ன் தீர்வுகளாக

(i) $\Sigma \alpha^2 \beta^2$ (ii) $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)$

(iii) $\Sigma \alpha^2 \beta$ (iv) $\Sigma \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \right)$ -ன்

மதிப்புகள் காண்க.

2. α, β, γ எல்லாம் $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் தீர்வுகளாக

(i) $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$ (ii) $\Sigma \frac{1}{\alpha^2 \beta^2}$ (iii) $\Sigma \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta \gamma}$

(iv) $(\beta + \gamma - 2\alpha)(\gamma + \alpha - 2\beta)(\alpha + \beta - 2\gamma)$

(v) $\Sigma \alpha^2 \beta^2$ -ன் மதிப்புகள் காண்க.

3. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ எல்லாம் $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ -ன் தீர்வுகளாக (i) $\Sigma \alpha^2 \beta \gamma$ (ii) $\Sigma \alpha^4$ -ன் மதிப்புகள் காண்க.

4. α, β, γ எல்லாம் $x^3 + qx + r = 0$ -ன் தீர்வுகளாக

(i) $\frac{1}{\beta + \gamma} + \frac{1}{\gamma + \alpha} + \frac{1}{\alpha + \beta}$

(ii) $\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$

$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \right)$ -ன் மதிப்புகள் காண்க.

5. $a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $(\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 18(a_1^2 - a_0 a_2)$ என தீர்வு.

6. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ எல்லாம் $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n = 0$ -ன் தீர்வுகளாக $\Sigma (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (n-1)p_1^2 - 2np_2$ என தீர்வு.

7. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ எல்லாம் $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$ -ன் தீர்வுகளாக (i) $\Sigma \alpha^2 \beta$ (ii) $\Sigma \frac{1}{\alpha^2}$ -ன் மதிப்புகள் காண்க.

9. α, β, γ என்பன $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் தீர்வுகளானால்
 (i) $(\alpha + \beta), (\beta + \gamma), (\gamma + \alpha)$
 (ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.
9. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ என்பன $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ -ன் தீர்வுகளானால்,
 (i) $\sum \frac{1}{\alpha_i}$ (ii) $\sum \alpha_i^2$ (iii) $\sum \alpha_i^3$ -ஐ மதிப்பிடுக காண்க.
10. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 8 = 0$ -ன் தீர்வுகளில் 3 ஆவது படி களில் கூட்டுத்தொகை காண்க.
11. $x^2 + 5x + 1 = 0$ -ன் தீர்வுகளில் 11 ஆவது படி களில் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக.
12. $x^2 + ax + b = 0$ -ன் தீர்வுகளில் 50 ஆவது படி களில் கூட்டுத்தொகை $50a^2b^2 - 4b^4$ என நிறுவுக.
13. $x^n - px^{n-1} - px^{n-2} - px^{n-3} \dots - px - p = 0$ -ன் தீர்வுகளில் r ஆவது படி களில் கூட்டுத்தொகை $(p+1)^r - 1$ என நிறுவுக.
14. $a+b+c+d+e=0, a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=0$ என்றால்
 (i) $(\sum a^2)^2 = 8 \sum a^4$.
 (ii) $\sum \frac{a^7}{7} = \sum \frac{a^5}{5} \cdot \sum \frac{a^2}{4}$ என நிறுவுக.
15. α என்பது $x^2 - 1 = 0$ -ன் அப்பனைத் தீர்வானால், $(\alpha + \alpha^2), (\alpha^2 + \alpha^4), (\alpha^4 + \alpha^8)$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.
16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -ன் தீர்வுகளில் 4 ஆவது படி களில் கூட்டுத் தொகை $2p^3$ என நிறுவுக.
17. α, β, γ என்பன $x^3 + qx + r = 0$ -ன் தீர்வுகளானால்,
 (i) $9S_2 S_3 = 6S_3 S_4$

$$(ii) \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{3} \cdot \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{3}$$

$$(iii) \frac{\alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7}{7} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{3} \cdot \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{3}$$

என நிறுவுக.

18. $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 12x + 4 = 0$ -ன் தீர்வுகளின் 5 ஆவது படியுக்கின் கூட்டுத் தொகை காண்க.

19. $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் S_4, S_5 காண்க.

20. $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $n \geq 5$ என்றால் $S_{2n+1} = 0$ என நிறுவுக.

21. $x^4 - x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $S_{3n-1} = 0$ என நிறுவுக.

22. $S_r =$ தீர்வுகளின் r -ஆவது படியுக்கின் கூட்டுத் தொகை யானால், $x^2 + ax^2 + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், $n \geq 5$ ஆனால் $S_{2n-1} = 0$ என நிறுவுக.

2-14. சமன்பாடுகளின் மாற்றி அமைத்தல் (Transformation of Equations)

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானால், $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi(\alpha_n)$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காணுதலே முதல் சமன்பாட்டை மாற்றி அமைத்தல் எனப்படும். இவ்வாறு மாற்றி அமைப்பதால் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணுவதோ அல்லது அவற்றின் தன்மைகளைப்பற்றி அறிதலோ சில சமயங்களில் எளிதாக இருக்கும். இப்போது சில முக்கியமான எளிய மாற்றங்களைக் கண்டோம்.

2-15. குறிப்பிடு மாற்றியமைக்கப்பட்ட மூலங்கள்

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $f(x) = 0$ -ன் மூலங்கள் எனில், $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு அமைத்தல்.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0 \\ &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \end{aligned}$$

x ஐ $-y$ என மாற்றி எழுதினும்

$$(-1)^r p + p_1 (-1)^{r-1} p^{-1} + \dots + (-1)^{r-1} p_{r-1} y + p_r \\ = (-1)^r (y + d_1) (y + d_2) \dots (y + d_r)$$

$$\text{அதாவது } p - p_1 y^{-1} + p_2 y^{-2} - \dots + (-1)^r p_r \\ = (y + d_1) (y + d_2) \dots (y + d_r)$$

எனவே, $-d_1, -d_2, \dots, -d_r$ என்பவை

$y^r - p_1 y^{r-1} + p_2 y^{r-2} - \dots + (-1)^r p_r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

எனவே $f(x) = 0$ -ல் $x = -y$ எனப் பிரதியிட்டுப் பெறப்படும் $f(-y) = 0$ நாம் வேண்டும் சமன்பாடாகும். அதாவது கொடுத்த சமன்பாட்டின் உறுப்புகளை ஒன்றுவிட்டு ஒன்று குறி மாற்றி அமைத்தாகப் போகும். ஆனால் விட்டுப்போன படிவங்களுக்கேற்ற உறுப்பின் கெழுக்களைப் பூச்சியம் எனக் கொண்டு மாற்றம் செய்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$7x^5 - 8x^4 + 9x^3 - x^2 - x^3 - 8x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் குறி மாற்றிய எண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

ஒன்று விட்டு ஒன்று அமைத்த உறுப்புகளின் குறியீட்டை மாற்றி அமைக்க $7x^5 + 8x^4 + 9x^3 + x^2 - x^3 + 8x + 1 = 0$ என்பது வேண்டும் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^5 - 5x^4 + 4x - 1 = 0$ -ன் மூலங்களின் குறியீடுகளை மாற்றி அமைக்க.

விடுபட்டுப்போன உறுப்புகளின் கெழுக்களைப் பூச்சியம் எனக் கொண்டு கொடுத்ததன் சமன்பாட்டை

$$x^5 + 0.x^4 + 0.x^3 - 5x^2 + 0.x^4 + 0.x^3 + 0.x^2 + 4x - 1 = 0$$

என எழுதலாம். இத்தரையில் ஒன்றுவிட்டு ஒன்றமைத்த உறுப்புகளின் கெழுக்களைக் குறி மாற்றியமைக்க,

$$x^5 - 0.x^4 + 0.x^3 + 5x^2 + 0.x^4 - 0.x^3 + 0.x^2 - 4x - 1 = 0$$

அதாவது $x^5 + 5x^2 - 4x - 1 = 0$ எனத் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

2-16. மூலங்களின் ஒரு குதிர்பிட்ட எண்ணும் பெருக்குதல்

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$ -ன் மூலங்களெனில்

$k\alpha_1, k\alpha_2 \dots k\alpha_n$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காணுதல்.

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = 0.$$

$$\text{வேண்டிய சமன்பாடு } (x - k\alpha_1)(x - k\alpha_2) \dots (x - k\alpha_n) = 0$$

$$\text{அதாவது, } \frac{1}{k^n} \left(\frac{x}{k} - \alpha_1 \right) \left(\frac{x}{k} - \alpha_2 \right) \dots \left(\frac{x}{k} - \alpha_n \right) = 0$$

இச் சமன்பாட்டைக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் x -க்குப் பதிலாக $\frac{x}{k}$ என எழுதுவதன் மூலம் பெறலாம். எனவே கொடுத்தன சமன்பாடு.

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

எனில் தேவையான சமன்பாடு,

$$\left(\frac{x}{k} \right)^n + p_1 \left(\frac{x}{k} \right)^{n-1} + \dots + p_{n-1} \left(\frac{x}{k} \right) + p_n = 0$$

அல்லது

$$x^n + p_1 k x^{n-1} + p_2 k^2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} k^{n-1} x + p_n k^n = 0$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் உறுப்புகளின் அடுத்தடுத்த கெழுக்களை மூன்றாவே 1, k, k² ... kⁿ என்பவற்றால் பெருக்கி எழுதினாலே வேண்டிய சமன்பாடு பெறப்படுகிறது.

குதிர்ப்பு :

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் மிக உயர்ந்த படியிலமைந்த உறுப்பின் கெழு ஒன்று என இயல்வானிடம், கெழு ஒன்று என அமைப்பாறு சமன்பாடு அனைக்க வேண்டியிருந்தால் சமன்பாட்டின் மூலங்களை இத்தக் கெழுவினும் பெருக்குவதன் மூலம் சமன்பாடு காணலாம்.

$$(\text{உ-ம்.}) \quad x^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x - 1 = 0 \text{-ன் மூலங்களை கெழுக்களை}$$

மாற்றி அமைக்க.

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களின் 6 ஆம் பெருக்கல்தான் கிடைக்கும்.

$$\text{சமன்பாடு } x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 6^2 \cdot \frac{2}{3} x - 6^3 = 0$$

$$\text{அதாவது } x^3 - 3x^2 + 24x - 216 = 0.$$

குறிப்பு 2:

சமன்பாட்டின் மின்னக் கெழுக்களை நீக்க வேண்டின், சமன்பாட்டின் மூலங்களின், மின்னக் கெழுக்களின் பகுதிகளின் அதமப் பொது மடங்கால் பெருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{18}{800} = 0 \text{-ன் மின்னக் கெழுக்களை நீக்கு.}$$

சமன்பாட்டை

$$x^4 - \frac{5}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{5}{2^2 \cdot 3} + 0 \cdot x - \frac{18}{2^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2} = 0$$

என எழுதலாம். எனவே $2 \times 3 \times 6 = 36$ ஆம் இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களால் பெருக்கினால் போதுமானது.

\therefore வேண்டிய சமன்பாடு

$$\begin{aligned} x^4 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{5}{2 \cdot 3} x^3 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6^2 \cdot \frac{5}{2^2 \cdot 3} x^2 \\ + 2^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2 \cdot 0 \cdot x - \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \times 18}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{அதாவது } x^4 - 25x^3 + 875x^2 - 11700 = 0$$

2.17. தலைமீற மூலங்கள் (Reciprocal Roots):

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைமீற மாற்றங்களின் மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு அமைத்தல்.

$f(x) = 0$ கொடுத்துள்ள சமன்பாடாக இருக்கட்டும்.

$y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட, வேண்டிய சமன்பாடு

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே x -க்கும் பதில் $\frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் தேவையான சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 6x - 2 = 0$ -ன் மூலங்களின் தலைகீழ் மாற்றத்தின் மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இச்சமன்பாட்டில் x -க்குப் பதிலாக $\frac{1}{x}$ எனப் பிரதியிட, வேண்டிய சமன்பாடு

$$\frac{1}{x^4} - \frac{8}{x^3} + \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x} - 2 = 0,$$

$$\text{அதாவது } 1 - 8x + 7x^2 + 6x^3 - 2x^4 = 0$$

$$\text{அல்லது } 2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = 0.$$

பயிற்சி 2 (e)

1. $x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 2x + 3 = 0$ -ன் தீர்வுகளின் குறி மாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.
2. $x^4 + 8x^3 + x^2 - x^2 + 7x + 2 = 0$ -ன் தீர்வுகளின் குறி மாற்றிய எண்களைத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.
3. $x^4 + 2x^3 - 4x + 1 = 0$ -ன் தீர்வுகளைப் போல் 3 மடக்கான தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.
4. $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$ -ன் தீர்வுகளைப் போல் 6 மடக்கான தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.
5. $\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x - \frac{1}{64} = 0$ -ன் திண்ணக் கொடுக்களை தீர்க்க.
6. $x^4 - \frac{5}{2}x^3 - \frac{7}{18}x + \frac{1}{108} = 0$ -ன் திண்ணக் கொடுக்களை தீர்க்க.
7. $x^4 - 4x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{9} = 0$ -ன் திண்ணக் கொடுக்களை தீர்க்க.

8. x^4 -ன் கொடு 1 ஆகவும் மற்ற கொடுக்கள் ஒழு எண் களாகவும் இருக்கும்படி $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை மாற்றி அமைக்க.
9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 6x - 2 = 0$ -ன் தீர்வுகளானால் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.
10. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x - 4 = 0$ -ன் தீர்வுகளானால் $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ ஐத் தீர்வுகளாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

2-18. தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடுகள் (Reciprocal Equations)

ஒரு சமன்பாட்டில் x ஐ $\frac{1}{x}$ என மாற்றுவதால் சமன்பாட்டின் அமைப்பு மாருதிருப்பின், அச்சமன்பாடு 'தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடு' எனப்படும்.

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0 \quad (1)$$

ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடெனக் கொள்வோம். இங்கு x -ஐ $\frac{1}{x}$ என மாற்றினால்,

$$p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + 1 = 0$$

அதாவது,

$$x^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} x^{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_n} x^{n-2} + \dots + \frac{p_1}{p_n} x + \frac{1}{p_n} = 0 \dots (2)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

சமன்பாடு (1) தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடு ஆகலின் (1), (2) ஆகிய இரண்டும் ஒரே சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டும்.

$$\therefore \frac{p_{n-1}}{p_n} = p_1, \frac{p_{n-2}}{p_n} = p_2 \dots \dots \frac{p_1}{p_n} = p_{n-1}, \frac{1}{p_n} = p_n$$

$$\therefore p_n^2 = 1 \quad \therefore p_n = \pm 1$$

எனவே]

$$p_n = 1$$

$$\therefore p_{n-1} = p_1, \quad p_{n-2} = p_2, \quad p_{n-3} = p_3 = \dots$$

இங்கு முதலிலிருத்தும் கடைசியிலிருத்தும் சம தூரத்தில் அமைந்துள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் எண் மதிப்பிலும் குறியிலும் ஒன்றுவிருக்கும்.

வகை ii

$$p_n = -1.$$

$$\therefore p_{n-1} = -p_1, p_{n-2} = -p_2 \dots p_1 = -p_{n-1}$$

இங்கு முதலிலிருத்தும் கடைசியிலிருத்தும் சம தூரத்தில் அமைந்துள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் எண் மதிப்பில் ஒன்றுவரும், குறியில் மாறுபட்டும் இருக்கும்.

2.19 தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடுகளின் திட்ட அமைப்பு (Standard form of Reciprocal Equations)

தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் α எனில், $\frac{1}{\alpha}$ -ம்

ஒரு மூலமாக இருத்தல் வேண்டும். ஏனெனில் $\frac{1}{\alpha}$ மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம்; ஆனால் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு முதல் சமன்பாடு ஆகிய இரண்டும் ஒன்றே. எனவே, ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டாண்டு மூலங்களாக வரும். $\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}, \beta, \frac{1}{\beta} \dots\right)$. சமன்பாட்டின் படி ஒத்தற்படையாக இருப்பின் ஒரு மூலத்தின் தலைகீழ் மாற்றம் அந்த மூலத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\text{அதாவது, } Y = \frac{1}{Y} \quad \therefore Y^2 = 1 \quad \therefore Y = \pm 1$$

சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் குறி ஒன்றையானால் -1 ஒரு தீர்வாகும்; முதலிலிருத்தும் இறுதியிலிருத்தும் சமதூரத்திலுள்ள உறுப்புகளின் குறி மாறுபட்டிருத்தால், $+1$ ஒரு தீர்வாகும். இரு நிலைகளிலும் சமன்பாட்டை $(x+1)$ ஆகவது $(x-1)$ ஆக வரலாம். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு எப்போதும் ஒர் இரட்டைப் படைப்படி தலைகீழ்மாற்றுச் சமன்பாடாகும். இதன் உறுப்புகளின் கெழுக்கள் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்கும்.

அடுத்து, ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் படி இரட்டைப் படை எனவும் ($n = 2m$), முதலிலிருத்தும் இறுதியிலிருத்தும் சம தூரத்திலமைந்த உறுப்புகள் மாறுபட்ட குறியை உடையன

வாகவும் இருந்தால், $p_n = -p_n$ அதாவது $p_n = 0$. எனவே இவ்வகைச் சமன்பாட்டில் நடு உறுப்பு இராது. எனவே இச் சமன்பாட்டை $x^{2n-1} - 1 + (x^{2n}-1)p_1x + \dots = 0$ என எழுதலாம்.

இதை (x^2-1) ஆல் வகுக்க ஓர் இரட்டைப்படைப் 'படி' தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதன் உறுப்புகளின் கொடுக்கை ஒரே குறியைப் பெற்றிருக்கும். எனவே கொடுக்கை ஒரே குறியை உடையனவான ஓர் இரட்டைப்படைப் 'படி' தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டை ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாட்டின் திட்ட அடிப்படாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு :

இங்கு விளக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் $x + \frac{1}{x} = y$ என்று பிரதிநிதித்துவம் மூலம் சமன்பாட்டின் படியைப் பாதியளவாகக் குறைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5 - 5x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 5x - 1 = 0$ -ன் தீர்வு காண்க. இச்சமன்பாட்டிற்கு $(x-1)$ ஒரு காரணி. இக்காரணியை நீக்கக் கிடைப்பது $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\text{அதாவது } \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 = 0.$$

$$x + \frac{1}{x} = u \text{ எனப் பிரதியிடுக.}$$

$$\therefore u^2 - 2 - 4u + 5 = 0$$

$$u^2 - 4u + 3 = 0$$

$$(u-3)(u-1) = 0$$

$$u = 3, 1$$

$$\text{அதாவது } x + \frac{1}{x} = 3 \text{ ஆகவது } x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 - 8x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{8 \pm \sqrt{6}}{2}$$

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$1, \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}, \frac{8 \pm \sqrt{6}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 10x + 1 = 0 \text{-ன் தீர்வு காண்க.}$$

இது ஒரு தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடாகும்.

x^2 ஆல் முழுவதும் வகுக்க,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 28 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y \text{ எனப் பிரதியிட,}$$

$$y^2 - 2 - 10y + 28 = 0$$

$$y^2 - 10y + 24 = 0$$

$$\therefore y = 6, 4.$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 6, 4.$$

$$y = 6 \text{ எனில் } x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \therefore x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$y = 4 \text{ எனில் } x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore \text{சமன்பாட்டின் மூலங்கள் } 3 \pm 2\sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$6x^6 + 11x^5 - 38x^4 - 38x^3 + 11x + 6 = 0$$

ஒன்றுவிட்டு ஒன்று கொழிக்கனிக் கூடுதல் செய். $\therefore x = 1$
சமன்பாட்டின் ஒரு மூலமாகும். $(x+1)$ ஆல் வகுக்க,

$$\text{கிடைப்பது, } 6x^4 + 6x^3 - 38x^2 + 6x + 6 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

x^2 ஆக வகுக்க,

$$6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 6 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 28 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = y \text{ எனப் பிரதிபலிக்க}$$

$$6(y^2 - 2) + 6y - 28 = 0$$

$$6y^2 + 6y - 50 = 0$$

$$(3y+10)(2y-5) = 0.$$

$$\therefore y = \frac{5}{2} \text{ அல்லது } -\frac{10}{3}$$

$$y = \frac{5}{2} \text{ எனில் } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = 2, \frac{1}{2}.$$

$$y = -\frac{10}{3} \text{ எனில் } x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{6} = -3, -\frac{1}{3}.$$

\therefore சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$-1, -\frac{1}{3}, -3, +\frac{1}{2}, 2 \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தீர்வு காண்க :

$$6x^5 - 25x^4 + 31x^3 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$$

சமன்பாட்டை $6(x^5-1) - 25x(x^4-1) + 31x^3(x^2-1) = 0$ என எழுதலாம்.

∴ $x^2 = 1$, அதாவது $x = 1, -1$ என்பவை இரு மூலங்கள்.

சமன்பாட்டை $(x^2 - 1)$ -ஆல் வகுக்க,

$$6(x^4 + x^2 + 1) - 26x(x^2 + 1) + 81x^2 = 0$$

$$6\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) - 26\left(x + \frac{1}{x}\right) + 81 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = z \text{ என்க. } x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

$$6(z^2 - 2 + 1) - 26z + 81 = 0$$

$$6z^2 - 26z + 25 = 0$$

$$(3z - 5)(2z - 5) = 0 \quad \therefore z = \frac{5}{3}, \frac{5}{2}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{5}{3} \text{ எனில் } 3x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{3} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{3}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ எனில் } 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = 2, \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{மூலங்கள் } 1, -1, 2, \frac{1}{2}, \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{3}$$

பயிற்சி 2 (f)

கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்:

1. $x^4 - 10x^2 + 26x^2 - 10x + 1 = 0.$

2. $6x^4 - 26x^2 + 81x^2 - 81x^2 + 26x - 6 = 0.$

3. $2x^4 + x^2 + x + 2 = 12x^2 + 12x^2$

4. $x^4 - 5x^4 + 9x^2 - 9x^2 + 5x - 1 = 0.$

5. $x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x + 1 = 0.$

6. $4x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 20x + 4 = 0$.
7. $8x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 8 = 0$.
8. $x^5 - 8x^4 - 14x^3 - 14x^2 - 8x + 1 = 0$.
9. $x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1 = 0$.
10. $x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0$.
11. $6x^5 - x^4 - 48x^3 + 48x^2 + x - 6 = 0$.
12. $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.
13. $x^{10} - 8x^8 + 5x^6 - 5x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.
14. $6x^5 - 25x^4 + 31x^3 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$.
15. $2x^5 - 9x^4 + 10x^3 - 8x^2 + 10x^2 - 9x + 2 = 0$.
16. $6x^5 - 17x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 6 = 0$.
17. $2x^5 - x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$.

2-20 கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் குறிப்பிட்ட அளவால் குறைத்தல் (To diminish the roots of an equation by a given quantity)

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என இருக்கட்டும். இந்நிலைக்கு $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \dots, \alpha_n - h$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$f(x) = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

இதில் x ஐ $y + h$ என மாற்றியமைக்க,

$$\begin{aligned} f(y+h) &= a_n (y+h - \alpha_1) (y+h - \alpha_2) \dots (y+h - \alpha_n) \\ &= a_n (y - \overline{\alpha_1 - h}) (y - \overline{\alpha_2 - h}) \dots (y - \overline{\alpha_n - h}) \end{aligned}$$

$\therefore y - \alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \dots, \alpha_n - h$ என்ற மதிப்புகளுக்கு வாய்ப்புக்கள் பூச்சியமாவதால் $\alpha_1 - h, \alpha_2 - h, \dots, \alpha_n - h$ என்பவையுள் $f(y+h) = 0$ -ன் மூலங்களாகும். எனவே, தேவையான மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$x = y + h$ எனக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் y திடுவதன் மூலம் கிடைக்கும்.

அதாவது,

$$a_0 (y+h)^n + a_1 (y+h)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (y+h) + a_n = 0 \quad (1)$$

இதை விரித்தெழுதி,

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_{n-1} y + A_n = 0 \quad \dots (2)$$

என்ற மூன்றாவது அமைக்கலாம். இங்கு A_0, A_1, \dots, A_n என்பவை a_0, a_1, \dots, a_n என்பவற்றைச் சார்ந்திருக்கும்.

$y = x - h$ ஆதலால் (2)-ஐ

$$A_0 (x-h)^n + A_1 (x-h)^{n-1} + A_2 (x-h)^{n-2} + \dots + A_{n-1} (x-h) + A_n = 0 \quad \dots (3)$$

என எழுதலாம். ஆனால், (1), (3) ஆகியவை ஒரே சமன்பாட்டைக் குறிக்கும். எனவே, (1) ஐ (3)-ன் அமைப்பில் எழுதினால் A_0, A_1, \dots, A_n -ன் மதிப்புகளை எளிதில் பெறலாம்.

$A_0 = a_0$ என்பது தெளிவு.

சமன்பாடு (3)-ன் இடப் பக்கத்தை $(x-h)$ ஆல் வகுத்தால் மீதி A_n , எவ் $A_0 (x-h)^{n-1} + A_1 (x-h)^{n-2} + A_2 (x-h)^{n-3} + \dots + A_{n-2} (x-h) + A_{n-1}$. இக்கொவைவை $(x-h)$ ஆல் வகுக்க, மீதி A_{n-1} எனக் கிடைக்கும். இதேபோன்று அடுத்தடுத்து $(x-h)$ ஆல் வகுத்துக்கொண்டே போனால் மூன்றாவது A_{n-2}, A_{n-3}, \dots என்பவற்றை மீதியாகப் பெறுகிறோம். இம்மூன்றாவது A_0, A_1, \dots, A_n என்ற கெழுக்களைக் கண்டுபிடிக்கிறோம்.

குறிப்பு :

சமன்பாட்டில் மூலங்களைக் குறைப்பதற்கும் பதிலாக அதிகரிக்க வேண்டின், 'h' க்குப் பதிலாக '-h' என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 5x^2 + 6x - 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஒல் கொன்றையும் விட ஒன்று அதிகமானதாக மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இங்கு $h = -1$.

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்களை $x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ ஐ $(x+1)$ ஆல் அடுத்தடுத்து வகுத்து வரும் மீதியைக் காணலாம்.

தொகு மூன்ற வகுத்தல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & -5 & 6 & -8 \\
 & & -1 & 6 & -12 \\
 \hline
 -1 & 1 & -6 & 12 & -16 \\
 & & -1 & 7 & \\
 \hline
 -1 & 1 & -7 & 19 & \\
 & & -1 & & \\
 \hline
 1 & & & & -8
 \end{array}$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 16 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

வினக்கம் :

சமன்பாட்டின் உறுப்புகளில் கெழுக்களை ஒரே கோட்டில் வரிசைப்பாக எழுதுக. கோவைகளை $(x+1)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி -16 . மறுபடியும் $(x+1)$ ஆல் வகுக்க, கிடைக்கும் மீதி 19 , சம $(x-7)$. இதை மறுபடியும் $(x-1)$ ஆல் வகுத்தால் சம 1 எனவும் மீதி -8 எனவும் வரும். எனவே -16 , $+19$, -8 , $+1$ என்பனவ மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கடைசி மீதிக்குத்து அனையும் உறுப்புகளில் கெழுக்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^4 + 4x^3 - x^2 + 11 = 0$ -ன் மூலங்களிலிட மூன்று குறைவாக மூலங்கள் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$n = 3$ \therefore மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் கெழுக்களைக் காண $(x^4 + 4x^3 - x^2 + 11)$ ஐ $(x-8)$ ஆல் மீண்டும் மீண்டும் வகுக்க வேண்டும்.

8	1	0	4	-1	0	11
		8	8	36	114	342
	1	8	18	36	114	358
		8	18	36	398	
		8	81	181	507	
		8	27	174		
		8	56	305		
		8	36			
		12	84			
		8				
		15				

$$\therefore \text{தேவையான சமன்பாடு } x^5 + 15x^4 + 84x^3 + 305x^2 + 507x + 358 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$8x^4 + 7x^3 - 15x^2 + x - 2 = 0$ -ன் மூலங்களை 7ஆல் அதிகரிக்கவும்.

இங்கு $h = 7$

8	7	-15	1	-2	7
	-21	98	-561	4080	
	-14	63	-580	4058	
	-21	242	-2296		
	-88	328	-2678		
	-21	392			
	-56	720			
	-21				
	-77				

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$8x^4 - 77x^3 + 720x^2 - 2678x + 4058 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

2-21. மூத்தகண் வினக்கப்பட்ட மாற்றம், ஒரு சமன்பாட்டிலிருந்து மூன்றாவது வரையில் படிப்படுத்தலாம். இம் மூத்தகண் ஒரு சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்பதையும் எளிதாக்கலாம்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதில் $y = x+k$ எனப் பிரதியிட.

$$a_0(y+k)^n + a_1(y+k)^{n-1} + a_2(y+k)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(y+k) + a_n = 0$$

என்ற புதிய சமன்பாடு கிடைக்கும். இதை

$$a_0y^n + (a_0nk + a_1)y^{n-1} + \left\{ \frac{n(n-1)}{2!} a_0k^2 + (n-1)a_1k + a_2 \right\} y^{n-2} + \dots = 0$$

என எழுதலாம்.

இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க வேண்டுக.

$$na_0k + a_1 = 0 \text{ ஆதல் வேண்டும்.}$$

அதாவது $k = -\frac{a_1}{na_0}$, எனவே சமன்பாட்டின் மூலங்களை $-\frac{a_1}{na_0}$ ஆல் குறைத்தால் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் இரண்டாம் உறுப்பு இராகு. இதேபோன்று மேற்குறித்த சமன்பாட்டிலுள்ள மூன்றாம் உறுப்பை நீக்க வேண்டுக.

$$\frac{n(n-1)}{2} a_0k^2 + (n-1)a_1k + a_2 = 0$$

k -ல் அமைத்த இவ்விருபடி சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் மூலம் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் குறைக்க வேண்டும். அப்போது மாற்றியமைக்கப்படும் சமன்பாட்டின் மூன்றாம் உறுப்பு (x^3) ஐ உடைய உறுப்பு இராகு.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$x^4 + 20x^2 + 148x^3 + 480x + 482 = 0\text{-ன்}$$

இரண்டாம் உறுப்பை நீக்கி, சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. மூலங்களின் h ஆக குறைப்பதன் மூலம் x^2 உறுப்பு நீக்கப்படுவதாகக் கொள்ளோம்.

எனவே, மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$(x+h)^2 + 20(x+h)^2 + 148(x+h)^2 + 480(x+h) + 482 = 0$$

அதாவது,

$$x^4 + x^2(4h+20) + x^2(\quad) + \dots = 0$$

$$\therefore 4h + 20 = 0 \text{ ஆகவுது } h = -5$$

எனவே இரண்டாவது உறுப்பை நீக்க, மூலங்களின் 5 ஆக அதிகரிக்க வேண்டும்.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 20 \quad 148 \quad 480 \quad 482 \quad | \quad -5 \\
 \hline
 -5 \quad 75 \quad -240 \quad -480 \\
 \hline
 15 \quad 68 \quad 90 \quad 12 \\
 \hline
 -5 \quad -50 \quad -80 \\
 \hline
 10 \quad 18 \quad 0 \\
 \hline
 -5 \quad -25 \\
 \hline
 5 \quad -7 \\
 \hline
 -5 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{அதாவது } (x^2-4)(x^2-3) = 0$$

$$\therefore x = \pm 2, \pm \sqrt{3}$$

ஆகவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$\sqrt{3} - 5, -\sqrt{3} - 5, 2 - 5, -2 - 5$$

அதாவது $\sqrt{3} - 5, -\sqrt{3} - 5, -8, -7$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β, γ என்பவை $x^3 - 7x + 6 = 0$ -ன் மூலங்களெனில் $\alpha^3 + 8\alpha + 2$, $\beta^3 + 8\beta + 2$, $\gamma^3 + 8\gamma + 2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இங்கு

$$y = x^3 + 8x + 2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

இவற்றிலிருந்து xஐ நீக்க வேண்டும்.

$$(i) \text{ இலிருந்து } x^3 + 8x + (2-y) = 0 \quad \dots \quad (i)$$

இதை x ஆல் பெருக்கி (ii) இலிருந்து கழித்தால் கிடைப்பது

$$-7x - 8x^3 + 6 - x(2-y) = 0$$

$$\text{அதாவது} \quad 8x^3 + (8-y)x - 6 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (iii)$$

(i), (iii) இலிருந்து

$$\frac{-15 - (8-y)(8-y)}{-15 - (8-y)(8-y)} = \frac{x}{8(2-y) + 6} = \frac{1}{(8-y) - 8}$$

$$(12-8y)^3 = -y(-y^3 + 11y - 88)$$

இதிலிருந்து கிடைப்பது

$$y^3 - 20y^2 + 105y - 144 = 0$$

இது கெட்கப்பட்ட சமன்பாடு ஆகும்.

பயிற்சி 2 (g)

1. α, β, γ, δ, θ என்பன $2x^5 + x^4 - 3x^3 - x + 2 = 0$ -ன் மூலங்களானால்,

(i) கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களினிட 2 குறைவாக

(ii) 4 அதிகமாக

(iii) 1 குறைவாக

(iv) 3 அதிகமாக

மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

இ.க. = 18

8. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ என்பன $x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 4 = 0$ -ன் மூலங்களானால், $(\alpha_1 - 8), (\alpha_2 - 8), (\alpha_3 - 8), (\alpha_4 - 8), (\alpha_5 - 8)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட $\alpha, \beta, \gamma \dots$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து, கொடுக்கப்பட்ட திபத்தனைக்குட்பட்ட மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்க :

சமன்பாடு	திபத்தனை
3. $x^3 - 2x^2 + 26x - 27 = 0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 3 குறைவாக.
4. $x^4 + 4x^3 - x^2 + 11 = 0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 8 குறைவாக.
5. $x^4 + 8x^2 - 4x + 9 = 0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 6 குறைவாக.
6. $8x^3 - 5x^2 + 7 = 0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 4 அதிகமாக.
7. $4x^3 - 2x^2 + 7x - 8 = 0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 2 அதிகமாக.
8. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 5 = 0$.	இதன் மூலங்களிலிருந்து 2 குறைவாக.
9. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்பன $4x^4 + 88x^3 + 58x^2 + 78x + 21 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் ஆனால் $(\alpha + 3), (\beta + 2), (\gamma + 2), (\delta + 2)$ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்டு, தீர்வு காண்க.	
10. $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களிலிருந்து 2 குறைவாக உள்ள மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் காண்டு, தீர்வு காண்க.	

தீர்வுகளும் சமன்பாடுகளும் இரண்டாவது உறுப்பை நீக்கித் தீர்வு காண்க :

11. $x^3 - 6x^2 + 4x - 7 = 0$.
 12. $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$.
 13. $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x - 2 = 0$.

$$14. \quad x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0.$$

$$15. \quad x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0.$$

$$16. \quad (i) \quad x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 84x - 129 = 0.$$

$$(ii) \quad x^4 + 20x^3 + 148x^2 + 420x + 468 = 0$$

$$17. \quad x^5 + 16x^4 + 88x^3 + 152x^2 + 54 = 0.$$

$$18. \quad x^3 - 12x^2 - 48x - 72 = 0.$$

$$19. \quad x^3 + 6x^2 + 12x - 19 = 0.$$

$$20. \quad x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x + 8 = 0.$$

2.22 சமன்பாட்டின் பொதுவான மாற்றங்கள் (Transformations in general)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$ -ன் மூலங்களாக இருக்கட்டும். $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \dots, \phi(\alpha_n)$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண வேண்டுமென இருக்கட்டும். $\alpha_1, f(x) = 0$ -ன் ஒரு மூலமெனில் $\phi(\alpha_1)$ தேவைபடும் சமன்பாட்டின் மூலமாகும்.

எனவே, $y = \phi(x)$ என்பது இவ்விரு மூலங்களுக்கிடையே யுள்ள தொடர்பின் அடிப்படையாகும்.

$$f(x) = 0,$$

$y = f(x)$ - இவற்றிலிருந்து x -ஐ நீக்கினால் கிடைக்கும் y -ன் அடிமத்த சமன்பாடு தேவைபடும் சமன்பாடு ஆகும். இம் முறையில் விளக்கம் அடுத்து வரும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் தெளிவுபடுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - x^2 + 5x - 8 = 0$ -ன் மூலங்களின் வர்க்கங்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனில் $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண வேண்டும்.

$\therefore y = x^2$ அதாவது, $x = \sqrt{y}$ எனக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் பிரதிபலிப்போம்.

$$y \sqrt{y} - y + 8 \sqrt{y} - 8 = 0$$

$$(y+8) = \sqrt{y} (y+8)$$

$$\therefore (y+8)^2 = y(y+8)^2$$

$$y^3 + 16y^2 + 64y - 88 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

α, β, γ என்பவை $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில்,

$$\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha}, \frac{\beta^2 - \gamma\alpha}{\beta}, \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{\gamma}$$

என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

(செ.ப.க.)

$$\text{சமன்பாடு } x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{எனவே } \alpha + \beta + \gamma = -p$$

$$\alpha\beta\gamma = -r$$

$$\therefore \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha} = \alpha - \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2} = \alpha + \frac{r}{\alpha^2}$$

$$\therefore y = x + \frac{r}{x^2} \text{ எனப் பிரதிபலிப்போம்.}$$

அதாவது $x^3y = x^3 + r$

$$x^3 - x^3y + r = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore (1) - (2) = (p+y)x^2 + qx = 0$$

$$\therefore x = -\frac{q}{p+y}$$

மேற் பிரதிபலிக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\left(-\frac{q}{p+y}\right)^3 + p\left(-\frac{q}{p+y}\right)^2 + q\left(\frac{-q}{p+y}\right) + r = 0$$

அதாவது $r(p+y)^3 - q^2(p+y)^2 + pq^2(p+y) - q^3 = 0$.

$$ry^3 - y^2(3pr - q^2) + y(3p^2r - pq^2) + (p^3r - q^3) = 0.$$

பயிற்சி 2 (h)

1. $x^3 - 14x + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் a, b, c ஆனும் $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$, $a^2 + b^2$ இ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. α, β, γ என்பன $x^3 + qx + r = 0$ -ன் மூலங்களானும், $\beta^2 + \gamma^2$, $\gamma^2 + \alpha^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ என்பன $(x + 2r)^4 + q^2(x + 8r) = 0$ -ன் மூலங்கள் என்று காட்டு.

α, β, γ என்பன கீழ்க்கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களானும், கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களைக் கொண்டு புதிய சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள்

3. $x^3 - 8px^2 + 8qx - r = 0$ $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$

4. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ $\alpha^2 + \alpha, \beta^2 + \beta, \gamma^2 + \gamma$

5. $x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = 0$ $\frac{\alpha-1}{\alpha+2}, \frac{\beta-1}{\beta+2}, \frac{\gamma-1}{\gamma+2}$

6. $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

7. α, β, γ என்பன $9x^3 - 27x^2 + 20x - 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள், $\beta = 3\alpha + 1$ ஆனும் அதன் நீதியை காண்க.

8. α, β, γ என்பன $8x^3 - 7x^2 - 22x + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள், $\beta = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ ஆனும், அதன் நீதியை காண்க.

9. $x^3 - 8ax + b = 0$ -ன் மூலங்கள் α, β, γ ஆனும், $\Sigma(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = 8a$ என்று நிரூபி.

10. $x^3 + 2x^2 + 3x + 3 = 0$ -ன் மூலங்கள் α, β, γ ஆனும்,

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} + \frac{\beta^2}{(\beta+1)^2} + \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} = 18$$

என்று காட்டுக.

11. a, b, c, d என்பன $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ -ன் மூலங்கள் ஆனும் $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = (s-q+1)^2 + (r-p)^2$ என்று காட்டுக.

12. α, β, γ என்பன $x^3 - x - 1 = 0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களானும் $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = 7$ என்ற சிறவு.

α, β, γ ஐ மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றிலிருந்து கொடுக்கப் பட்ட மூலங்களுக்குச் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும்.

சமன்பாடுகள்

கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள்

$$13. \quad x^3 - px^2 + qx - r = 0, \quad \alpha, \beta + \frac{1}{\alpha}, \quad \beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \\ \alpha\gamma + \frac{1}{\beta}.$$

$$14. \quad x^3 - px^2 + qx - r = 0, \quad \frac{\alpha}{\beta + \gamma - \alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma + \alpha - \beta}, \\ \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma}.$$

$$15. \quad x^3 - 8x + 1 = 0, \quad (\alpha - 2), (\beta - 2), (\gamma - 2).$$

$$16. \quad x^3 - 8x + 1 = 0, \quad (\alpha - 2)^2, (\beta - 2)^2, (\gamma - 2)^2$$

$$17. \quad x^3 - 8x + 1 = 0, \quad \frac{1}{(\alpha - 2)^2}, \frac{1}{(\beta - 2)^2}, \frac{1}{(\gamma - 2)^2}.$$

$$18. \quad \left. \begin{array}{l} x^3 - gx + r = 0\text{-ன்} \\ \text{மூலங்கள் } \alpha, \beta, \gamma \\ \text{ஆனும்,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{\alpha} \right), \\ \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \right), \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} \right) \end{array}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{1}{\beta + \gamma - \alpha} + \frac{1}{\gamma + \alpha - \beta} + \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta + \gamma} \\ \text{—மதிப்பைக் காண்க.}$$

ஒரு சமன்பாட்டின் நீர்வுகள் காணாமலேயே அவற்றின் தன்மையைத் தீர்மானிக்கலாம்.

2.23. சமன்பாட்டின் நீர்வுகளின் தன்மை காணல் (To find the Nature of the roots of an equation)

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 8x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் குறிகளை வரிசையாக எழுதினால் $+-++-$ எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு முதல் உறுப்பிலிருந்து 2 ஆம் உறுப்பிற்கு $+$ இலிருந்து $-$ க்கு ஒரு குறி மாற்றமெனவும், 2 ஆம் உறுப்பிலிருந்து 3 ஆவதற்கு $-$ இலிருந்து $+$ க்கு ஒரு குறி மாற்றமெனவும், 3 ஆம் உறுப்பிலிருந்து நான்காம் உறுப்பிற்கு $+$ லிருந்து $-$ க்கு ஒரு குறி மாற்றம் அக்க எனவும், இறுதியாக நான்காம் உறுப்பிலிருந்து ஐந்தாம் உறுப்பிற்கு $+$ இலிருந்து $-$ க்கு ஒரு குறி மாற்றமெனவும், ஆக மொத்தம் மூன்று குறி மாற்றங்கள் அமைந்துள்ளன. இதேபோன்று

$x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 8x - 1 = 0$ -ல் 3 குறி மாற்றங்களும்,

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 8x + 1 = 0$ -ல் 4 குறி மாற்றங்களும்,

$x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 8x + 1 = 0$ -ல் 2 குறி மாற்றங்களும்,

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$ -ல் குறி மாற்றமே இல்லாமலும் அமைந்துள்ளன. ஒரு சமன்பாட்டின் அமைந்துள்ள உறுப்புகளின் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை, சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுகிறது.

2.24. டேகார்ட்டின் குறி விதி (Descartes' Rule of Signs)

(கூட்டு மெய் மூலங்கள்)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய்யெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கை அச்சமன்பாட்டில் தோன்றும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கு மிகைப்படாது.

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் 2 உறுப்புகளின் குறிகள் கீழ்க்கண்ட வரிசையிலிருப்பதாக அமைவட்டும்,

$++--+-+---+$

இங்கு 3 குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ஆறு ஆகும்.

$f(x)$ -ஐ $(x-\alpha)$ ஆகப் பெருக்குவோம். (α கூட்டு மெய்யெண்) பெருக்கற்பணவிலுள்ள உறுப்புகளின் குறியைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 + & + & - & - & + & - & + & - & - & - & + & \\
 & & & & & & & & & & + & - \\
 \hline
 & - & + & + & - & + & - & + & + & + & - & \\
 \hline
 + & + & - & - & + & - & + & - & - & - & + & \\
 \hline
 + & + & - & - & + & - & + & - & - & - & + & - \\
 \hline
 \end{array}$$

கடைசி வரிசையில், மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்ட இரு உறுப்புகளைக் கூட்டுகிறபோது $+$ அல்லது $-$ என்ற குறி அமைக்கப் பட்டுள்ளது. அதாவது இவ்வுறுப்புகளின் குறி $+$ எனவோ அல்லது $-$ எனவோ இருக்கலாம். இப்போது கடைசி வரிசையில் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிப்போம்.

$f(x)$ -ல், அதாவது, முதல் வரிசையில் 11 உறுப்புகளும் 6 குறி மாற்றங்களும் உட்களன. $f(x)(x-\alpha)$ -ல், அதாவது, கடைசி வரிசையில் முதல் 11 உறுப்புகளின் குறிகளும், $f(x)$ -ல் உள்ள 11 உறுப்புகளின் குறிகளை ஆகவாதே பெற்றுள்ளன என வைத்துக் கொண்டால் கூட, $f(x)(x-\alpha)$ -ல் கடைசி உறுப்பை (12 ஆம் உறுப்பு) பொறுத்த வரையில் ஒரு குறி மாற்றம் அதிகமாக உட்களது. அதாவது $f(x)$ -ல் 6 குறி மாற்றங்கள் இருப்பின் $f(x)(x-\alpha)$ -ல் குறைந்தது 7 குறி மாற்றங்களாவது இருக்கும்.

ஆகவே α கூட்டு மெய்யெண்ணானால் $f(x)$ ஐ $(x-\alpha)$ ஆகப் பெருக்கும்போது $f(x)(x-\alpha)$ -ல் $f(x)$ -ன் குறி மாற்றங்களிலை குறைந்தது ஒரு குறி மாற்றமாகவது அதிகமாக இருக்கும்.

இப்போது $f(x) = 0$ -ன் குறை மெய் மூலங்கள், கற்பனை மூலங்கள் இவற்றை ஒத்த காரணிகளின் பெருக்குத் தொகை $F(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கொள்வோம். $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்பவை $f(x) = 0$ -ன் கூட்டு மெய் மூலங்கள் எனில், $F(x)$ ஐ $(x-\alpha_1), (x-\alpha_2), \dots, (x-\alpha_n)$, என்ற ஒவ்வொரு காரணியாலும் பெருக்கும்போது ஒவ்வொரு நிற்றும் குறைந்தது ஒரு குறி மாற்றமேனும் அதிகரிக்கும். எனவே, $F(x)$ ஐ $f(x) = 0$ -ன் கூட்டு மெய் மூலங்களுக்கான காரணிகள் எல்லாவற்றாலும் பெருக்கி $f(x) = F(x)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$ என வரும் கோவையில் குறைந்தது n குறி மாற்றங்களேனும் இருக்கும். அதாவது

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $f(x)$ -ல் அமைந்த குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைவிட அதிகமாக இருக்க முடியாது. இதுவே டிகார்ட்டின் குறி விதி எனப்படும்.

குறை மெய் மூலங்கள் (Negative Roots) :

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ என்பவை கூட்டு மெய்யெண்களெனில்,

$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ என இருக்கட்டும்.

இதில் x ஐ $-x$ என மாற்றி எழுதினால் கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x - \alpha_1)(-x - \alpha_2) \dots (-x - \alpha_n) \\ &= (-1)^n (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_n) \end{aligned}$$

$\therefore f(-x) = 0$ -ன் மூலங்கள் $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$

அதாவது $f(x) = 0$ -ன் குறை மெய் மூலங்கள், $f(-x) = 0$ -ன் கூட்டு மெய் மூலங்கள் ஆகின்றன.

எனவே, $f(x) = 0$ -ன் குறை மெய் மூலங்களின் மிக அதிகமான எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க $f(-x) = 0$ -ன் கூட்டு மெய் மூலங்களின் மிக அதிகமான எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடித்தால் போதும். ஆகவே, $f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $f(-x)$ -ல் அமைந்த குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையை விட அதிகமாக இருக்க முடியாது.

குறிப்பு :

டிகார்ட்டின் குறி விதியிலிருந்து ஒரு சமன்பாட்டின் மெய் பெண் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண இயலாது. இவ்வெண்ணிக்கையின் மிக உயர்ந்த எல்லைப்போல காணமுடியும். மேலும் இவ்விதியின் மூலம் ஒரு சமன்பாட்டிற்குக் கற்பனை மூலங்கள் உள்ளனவா எனவும் கண்டுபிடிக்கலாம். ஏனெனில், ஒரு சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையின் உயர் எல்லை p எனவும், குறை மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையின் உயர் எல்லை q எனவும் இருந்தால் அச்சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது $n = (p+q)$ கற்பனை மூலங்களாவது இருந்தல் வேண்டும். இங்கு n , சமன்பாட்டின் படினைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ -க்குக் குறைந்தது இரு கற்பனை மூலங்களேனும் உள்ளன என நிரூபிக்க.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 \quad \text{என இருக்கட்டும்.}$$

$$f(-x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$$

$f(x)$ -ல் இரண்டு குறி மாற்றங்களும், $f(-x)$ -ல் இரண்டு குறி மாற்றங்களும் உள்ளன. எனவே, $f(x)=0$ -ல் அதிக மட்டும் 3 கூட்டு மெய் மூலங்களும், அதிக மட்டும் 3 குறை மெய் மூலங்களும் தான் உள்ளன. சமன்பாட்டின் படி ஆறு. எனவே, இச்சமன்பாட்டின் குறைந்த மட்டும் இரண்டு கற்பனை மூலங்களாவது உள்ளன. (\therefore சமன்பாட்டிற்குப் பூச்சியம் மூலமாக இல்லை.)

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ -க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்களேனும் உள்ளன என நிரூபிக்க.

$$f(x) = 2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 \quad \text{எனக் கொள்க.}$$

$f(x)$ -ல் மூன்று குறி மாற்றங்கள் இருப்பதால் $f(x)=0$ -ல் மூன்றுக்கு மேற்பட்ட கூட்டு மெய் மூலங்கள் இருக்க முடியாது. மேலும் $f(-x) = -2x^7 - x^4 - 4x^3 - 5$. இதில் குறிகாற்றங்களே இல்லை. எனவே, $f(x)=0$ -ல் குறை மெய் மூலங்களே இருக்க முடியாது. சமன்பாட்டிற்குப் பூச்சியம், மூலமாக இல்லை. மேலும் சமன்பாட்டின் படி ஏழு. சமன்பாட்டின் மெய் மூலங்களின் அதிக மட்ட எண்ணிக்கை 3 ஆதலால், அதன் கற்பனை மூலங்களின் எண்ணிக்கை, குறைந்தது 4 ஆகும்.

2.25. 'ரோல்' தேற்றம் 11 (Rolle's Theorem)

$f(x)=0$ -ன் a, b என்ற அடுத்தடுத்த மெய் மூலங்களுக்கு இடையில் $f'(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒத்தறப்படை எண்ணிக்கையுள்ள தீர்வுகள் உள்ளன; குறைந்தது ஒரு தீர்வேனும் உண்டு. [Between two consecutive real roots a and b of the equation $f(x)=0$, there lies an odd number of real roots of $f'(x)=0$; there is at least one real root of $f'(x)=0$ between a and b].

தெளிவு :

m, n கூட்டு முழு எண்களாயின்,

$f(x) = (x-a)^m (x-b)^n \phi(x)$ எனக் கொள்வோம். இங்கு $\phi(x)$ -க்கு a, b க்கிடையில் ஒரு மெய்யெண் தீர்வும் இருக்க முடியாது. ஏனெனில் அங்ஙனம் ஒரு தீர்வு இருக்குமெனில் அது $f(x)=0$ -க்கும் தீர்வாகும். ஆனால், a, b -க்கு இடையில் $f(x)=0$ -க்கு வேறு தீர்வுகள் இல்லை எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும், $\phi(a) \neq 0, \phi(b) \neq 0, \phi(x)$ -ன் குறி $a < x < b$ என்ற இடைவெளியில் மூலமற்றும் ஒன்றோடாக இருக்க வேண்டும். அங்ஙனம் $\phi(x)$ -ன் குறி இந்த இடைவெளியில் மாறுபடுமெனில் $\phi(x)=0$ -க்கு a, b -க்கு இடையில் ஒரு மூலம் இருக்கும். இந்த மூலம் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் மூலமாக அமைவும். ஆனால் கொள்கைப்படி இது ஒவ்வாது.

இப்பொழுது $f(x) = (x-a)^m (x-b)^n \phi(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-a)^{m-1}(x-b)^n \phi(x) \\ &\quad + n(x-b)^{n-1}(x-a)^m \phi(x) \\ &\quad + (x-a)^m (x-b)^n \phi'(x) \\ &= (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} [\{m(x-b) \\ &\quad + n(x-a)\} \phi(x) + (x-a)(x-b) \phi'(x)] \end{aligned}$$

அதாவது,

$f'(x) = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} F(x)$ என எழுதினோம்.

$$\begin{aligned} F(x) &= m(x-b) + \phi(x) + n(x-a)\phi(x) \\ &\quad + (x-a)(x-b)\phi'(x) \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

$$F(a) = m(a-b)\phi(a)$$

$$F(b) = n(b-a)\phi(b)$$

$$= -n(a-b)\phi(b)$$

$\phi(a), \phi(b)$ -இவை ஒரே குறையைக் கொண்டு இருப்பதால்,

$F(a), F(b)$ ஒன்றுக்கொன்று மாற்றுக் குறையைக் கொண்டு இருக்கும். எனவே, a, b - இவற்றிற்கிடையே $F(x) = 0$ -க்கு ஒத்தற்ப்படை எண்ணிக்கையுள்ள மூலங்கள் உள்ளன. ஆகவே $f'(x) = 0$ -க்கும் a, b -க்கு இடையில் ஒத்தற்ப்படை எண்ணிக்கையுள்ள மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன.

பொத்தேற்றம் 1 :

$f'(x) = 0$ -ன் எல்லா மூலங்களிலும் மெய் எண்கள் எனில் $f(x) = 0$ -ன் மூலங்களும் மெய்யெண்களாகும்.

4) மெய்கில், $f(x) = 0$ -ன் $f(x)$, n படி. பல்லுறுப்புக்கோவைகளில் $f'(x) = 0$ -ன் $f'(x)$, $(n-1)$ படி. பல்லுறுப்புக் கோவைகளும், எனவே $f(x) = 0$ -ன் n மூலங்களாகக் கிடைப்பதன் $(n-1)$ இடை, மெய்கில் ஒவ்வொன்றிலும் $f'(x) = 0$ -ன் $(n-1)$ மூலங்களில் ஒன்று அமைந்திருக்கும்.

மீளத்தேற்றம் 2 :

$f(x) = 0$ -ன் எல்லா மூலங்களும் மெய்யெண் மதிப்புடையவை எனில், $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$ என்பவற்றின் எல்லா மூலங்களும் மெய்யெண்களாகும்.

மீளத்தேற்றம் 3 :

$f'(x) = 0$ -ன் அடுத்தடுத்த இரண்டு மெய் மூலங்களாகக் கிடைக்கில் $f(x) = 0$ -க்கு ஒரே ஒரு மூலத்தான் இருக்க முடியும்.

மீளத்தேற்றம் 4 :

$f'(x) = 0$ -ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை r எனில், $f(x) = 0$ -ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கை $(r+1)$ -க்கு அதிகமாகாது.

மீளத்தேற்றம் 5 :

$f(x) = 0$ -க்கு எத்தனை கற்பனை மூலங்கள் உள்ளனவோ குறைந்த பட்சம் அத்தனை கற்பனை மூலங்களேனும் $f(x) = 0$ பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 - 6x^2 - 4x + 5 = 0$ -ன் மூலங்களின் தன்மைகளைக் காண்க.

இச் சமன்பாட்டின் உறுப்புகளின் குறிகள் $+$ $-$ $-$ $+$ என அமைந்துள்ளன. இதில் இரண்டு குறியாற்றங்கள் வருவதால் சமன்பாட்டிற்கு இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கூட்டு மெய் மூலங்கள் இருக்க முடியாது. மேலும் x - x என மாற்றியமைத்தால் சமன்பாடு $-x^4 - 6x^2 + 4x + 5 = 0$ அதாவது $x^4 + 6x^2 - 4x - 5 = 0$ என மாறுகிறது. இதில் வரும் உறுப்புகளின் குறிகள் $+$ $+$ $-$ $-$ என அமைந்துள்ளதால் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ஒன்று. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு குறை மெய் மூலம் தான் இருக்க முடியும். ஆகவே, சமன்பாட்டிற்கு மூன்றிற்கு மேல் மெய் மூலங்கள் இருக்க முடியாது. மேலும் சமன்பாட்டின் படி 5 ஆதலால் இரண்டு கற்பனை மூலங்களேனும் இச் சமன்பாட்டிற்கு உண்டு.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
$x^3 - 3x^2 - 4x + 5$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

மேற்குறித்த மதிப்புகளிலிருந்து கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்கு -2 , -1 என்பவற்றிற்கிடையில் ஒரு குறைந்த மெய் மூலமும், 0 , 1 இவற்றிற்கிடையிலும், 1 , 2 இவற்றிற்கிடையிலுமாக இரு கூட்டு மெய்மூலங்கள் உள்ளன எனவும் ஆகியிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{1} = 0$$

எனில்,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

என்ற சமன்பாட்டிற்கு 0 , 1 இவற்றிற்கிடையே குறைந்தது ஒரு மூலமாவது இருக்க வேண்டும் என நிரூபிக்க.

$$\frac{a_0 x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \frac{a_2 x^{n-1}}{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1} x^2}{2} + \frac{a_n x}{1} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை $f(x) = 0$ எனக் கொண்டால்

$$f(0) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும்,

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_n}{1} \\ &= 0 \text{ (தரவு)} \end{aligned}$$

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$ ஆதலால், 'ரோல்' தேற்றத்தின் படி 0 , 1 -க்கிடையில் $f(x) = 0$ -க்கு ஒரு மூலமாவது இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகும்,

$$f(x) = \frac{a_n}{n+1} (n+1)x^n + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot nx^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{n-1} (n-1)x^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} \cdot 2x + a_n \\ + a_1x^1 + a_2x^{2-1} + a_3x^{3-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

எனவே 0, 1-க்கிடையே

$$a_1x^1 + a_2x^{2-1} + a_3x^{3-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0\text{-க்கு}$$

ஒரு மூலமேனும் இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$8x^3 + 8x^2 - 8x^1 - 24x + r = 0$ -ல் $-12 < r < -8$ எனில் நான்கு மூலங்களும் மெய்யெண்கள் எனவும் $-8 < r < 12$ எனில் இரு மூலங்கள் மெய்யெண்கள் எனவும் $r > 12$ எனில் மெய் மூலங்களே கிடைப்பாது எனவும் தீர்வுக.

$$f(x) = 8x^3 + 8x^2 - 8x^1 - 24x + r \text{ என இருக்கட்டும்}$$

$$\therefore f'(x) = 12x^2 + 16x^1 - 12x - 24 \\ = 12(x^2 + 2x^1 - x - 2) \\ = 12(x+2)(x+1)(x-1)$$

எனவே, $f'(x)=0$ -ன் மூலங்கள் $-2, -1, 1$ ஆகும்.

x	$-\infty$	-2	-1	1	∞
$f(x)$	$+$	$8+r$	$12+r$	$r-12$	$+$

$f(x)=0$ -ன் நான்கு மூலங்களும் மெய்யெண்கள் எனில், $f'(x)=0$ -ன் மூலங்கள் $f(x)=0$ -ன் மூலங்களுக்கிடையே ஆகாமத் திருக்கும். $f'(x)=0$ -ன் மூலங்கள் $-2, -1, 1$ ஆகையால் $f(x)=0$ -ன் மூலங்கள் $(-\infty, -2)$ $(-2, -1)$, $(1, \infty)$ என்ற எல்லைகளுக்கு இடையே இருத்தல் வேண்டும்.

$$f(-\infty) > 0, \text{ எனவே } f(-2) < 0$$

$$\begin{aligned} \text{ஆதாவது } 8+r &< 0 & \therefore r < -8 \\ 18+r &> 0 & \therefore r > -18 \\ r-19 &< 0 & \therefore r < +19 \end{aligned}$$

எனவே, $-18 < r < -8$ எனில், $f(x)=0$ -ன் தூக்கு மூலம் கனாமே மெய்யென்கள்.

$$-8 < r < 19 \text{ எனில் } r+8 > 0, r-19 < 0.$$

$$\text{ஆதாவது, } f(-8) > 0, f(1) < 0 \text{ மேலும் } f(+\infty) > 0.$$

எனவே, $f(x)=0$ -ல் $-8, 1$ -க்கிடையே ஒரு மூலமும் $1, +\infty$ -க்கிடையே ஒரு மூலமாவாக இரண்டு மெய் மூலங்கள் உண்டு.

(iii) $f(x) = 0$ -க்கு மெய் மூலங்களே இல்லையெனில் x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ ஒரே குறியைப் பெற்றிருத்தல் வேண்டும். $f(-\infty) > 0, f(+\infty) > 0$ ஆதலின் x -ன் மற்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x) > 0$

$$\therefore \left. \begin{aligned} 8+r &> 0 & \therefore r > -8 \\ 18+r &> 0 & \therefore r > -18 \\ r-19 &> 0 & \therefore r > 19 \end{aligned} \right\}$$

$\therefore r > 19$ என இருப்பின் $f(x) = 0$ -ன் மூலங்கள் யாவும் கற்பனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$x^2 + px + q = 0$ -ன் மூலங்களின் வேறுபாடுகளின் இரு படிசரி மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க. இதிலிருந்து கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களும் மெய் மதிப்புக் கொண்டவற்றான நிபந்தனைவைக் காண்க.

$x^2 + px + q = 0$ -ன் மூலங்கள் α, β, γ என இருக்கட்டும்.

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -q$$

$$(\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma$$

$$= \alpha^2 - \frac{4\beta\alpha\gamma}{\alpha}$$

$$= \alpha^2 + \frac{4q}{\alpha}$$

$\therefore (\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு காண்க.

$$x^3 + px + q = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$y = x^3 + \frac{4q}{x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவற்றிலிருந்து விவக்க வேண்டும்.

$$(2) \text{ இலிருந்து } x^3 = xy - 4q$$

$$(1) \text{ இலிருந்து } x^3 = -px - q$$

$$\therefore xy - 4q = -px - q$$

$$x(y+p) = 3q$$

$$\therefore x = \frac{3q}{y+p}$$

எனவே, $(\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2, (\alpha - \beta)^2$ என்பவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு,

$$\frac{27q^3}{(y+p)^3} + \frac{8pq}{y+p} + q = 0$$

$$\text{அதாவது, } q(y+p)^3 + 8pq(y+p) + 27q^3 = 0$$

$$\phi(y) = y^3 + 8py^2 + 8p^2y + 4p^3 + 27q^3 = 0$$

$(\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2$ என்பது $\phi(y) = 0$ -ன் மூலங்களின் பெருக்குத் தொகையாகும்.

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2 = - (4p^3 + 27q^3)$$

α, β, γ இவை எல்லாம் மெய் மதிப்புடையவை எனில்,

$(\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2$ கூட்டு மதிப்புடையதாக இருக்கக் வேண்டும்.

$$\therefore (4p^3 + 27q^3) \text{ குறைவான மதிப்புடையதாகக் வேண்டும்.}$$

$$\phi(0) = 4p^3 + 27q^3 < 0$$

$$\begin{aligned} \phi(-p) &= -p^3 + 8p^3 - 8p^3 + 4p^3 + 27q^3 \\ &= 27q^3 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(-8p) &= -27p^3 + 54p^3 - 27p^3 + 4p^3 + 27q^3 \\ &= 4p^3 + 27q^3 < 0\end{aligned}$$

$$\phi(\infty) > 0.$$

எனவே, $\phi(y)=0$ -ன் மூலங்கள் $(0, -p)$, $(-p, -8p)$ $(-8p, +\infty)$ என்பவற்றிற்கிடையே அமைந்திருக்க வேண்டும்.

p குறை மதிப்புடையதாக இருப்பதால், $-p$, $-8p$ ஆகிய இரண்டும் கூட்டு மதிப்புடையவையாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore \phi(y)=0$ -ன் மூலங்கள் யாவும் கூட்டு மதிப்புடையவை. எனவே, $f(x)=0$ -ன் மூலங்கள் எல்லாம் மெய் மதிப்புடையவை. எனவே, $x^3+px+q=0$ ன் மூலங்கள் யாவும் மெய் மதிப்பு பெற்ற குப்பதற்கான தேவையான, போதுமான நிபந்தனை $(4p^3+27q^3)$ குறை மதிப்புடையதாக இருப்பதே ஆகும்.

பயிற்சி 2 (1)

1. $x^5-x^3+8x^2+4x-1=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது இரண்டு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என்று நிறுவுக.
2. $f(x)$ ஆனது x -ன் இரட்டைப்படை என்ற படிக்களை ஆன, ஒரே குறியை உடைய கெழுக்களைக் கொண்டிருந்தால், $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யான மூலங்கள் இல்லை என்று நிரூபி.
3. $f(x)$ -க்கு x -ன் ஒற்றைப் படை எண்ணால் ஆன படிக்களைக் கொண்ட ஒரே குறியை உடைய கெழுக்களைக் கொண்டிருந்தால் $f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x=0$ தவிர வேறு மெய்யான மூலங்கள் இல்லை என்று நிரூபி.
4. $x^{2n+1}+8x^3+4x-8=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு ஒரு கூட்டு மெய்யான மூலமும், $2n$ கற்பனை மூலங்களும் உண்டு எனக் காட்டு.
5. $2x^4-2x^3-4x+2=0$ -க்கு மூன்று மெய் மூலங்களும், இரண்டு கற்பனை மூலங்களும் உண்டு என்று காட்டு.
6. $x^5-8x^4+2x^3-1=0$ -க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என்று நிரூபி.

7. $x^4 + 2x^3 - 5x + 1 = 0$ -க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என்று நிரூபி.
8. $x^7 - x^2 - x^4 - 8x^5 + 7 = 0$ -ல் எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் உள்ளன?
9. $12x^7 - x^4 + 10x^3 - 29 = 0$ -க்குக் குறைந்தது நான்கு கற்பனை மூலங்கள் உண்டு என நிரூபி.
10. மூலங்களின் தன்மைமையக் காண்க :
- (1) $4x^3 - 21x^2 + 18x + 80 = 0$.
- (2) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 8 = 0$.
- (3) $x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 10 = 0$.
11. $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ -க்கு ஒரு மெய் மூலமும், இரண்டு கற்பனை மூலங்களும் உண்டு என்று காட்டு.
12. $x^3 - 3x + c = 0$ க்கு எல்லா மூலங்களும் மெய்யானால், c -ன் எல்லை காது?
13. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளில் k -ன் எல்லை மதிப்பைக் காண்க :
- (1) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 + k = 0$
- (2) $2x^3 - 2x^2 + 12x - k = 0$
- (3) $3x^3 - 4x^2 - 12x^2 + k = 0$.
14. a_1, a_2, a_3, a_4 எண்பவைகள் மெய்யெண்களாகில்,
- $$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \frac{1}{x-a_3} + \frac{1}{x-a_4} = 0$$
- ன் மூலங்களும் மெய்யானவை என்று காட்டு.
15. $1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{4}{x} = 0$ -ன் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் என்று காட்டு.
16. $x^3 - 7x + 6 = 0$ -ன் மூலங்கள் மெய்யெண்களே என்று நிரூபி.

17. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6 = 0$ -ன் மூலங்களில் இரண்டு மெய் மூலங்கள், இரண்டு கற்பனை மூலங்கள் உள்ளன என்று காட்டு.

18. $17 < a < 29$ ஆனால் $x^4 - 10x^3 + ax + 8 = 0$ -ன் மூலங்கள் மெய்யானவை.

2.28. பன்மடங்கு மூலங்கள் (Multiple Roots)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் r மூலங்கள் சமமொன்றில் (α என்று), α , $f(x) = 0$ -ன் r மடங்கு மூலம் ஆகும். எனவே, $f(x) = (x-\alpha)^r \phi(x)$ என்ற மூலதரமில் இருக்கும்.

இங்கு $\phi(\alpha) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= r(x-\alpha)^{r-1} \phi(x) + (x-\alpha)^r \phi'(x) \\ &= (x-\alpha)^{r-1} [r \phi(x) + (x-\alpha) \phi'(x)] \end{aligned}$$

$x = \alpha$ என இருக்கும்போது

$$r \phi(\alpha) + (x-\alpha) \phi'(x) = r \phi(\alpha) \neq 0.$$

$\therefore (x-\alpha)$, $[r \phi(x) + (x-\alpha) \phi'(x)]$ -ன் ஒரு α r ன்ரி அல்ல.

எனவே $f'(x) = (x-\alpha)^{r-1} [r \phi(x) + (x-\alpha) \phi'(x)] = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, α , $(r-1)$ மடங்கு மூலமாகும்.

நீண்டதேற்றம் :

(i) $f'(x) = 0$ -ல் α , $(r-1)$ மடங்கு மூலமாகலாம்,

$f''(x) = 0$ -ல் α , $(r-2)$ மடங்கு மூலமாகும்,

$\therefore f'''(x) = 0$ -ல் α , $(r-3)$ மடங்கு மூலமாகும்,

... ..

$f^{r-1}(x) = 0$ -ல் α , ஒரு மூலமாகும்.

எனவே, மறுதலியாக α , $f^{r-1}(x) = 0$ -ன் ஒரே ஒரு மூலம் அமைந்த மூலமாகவும் $f(x) = 0$ -ன் மூலமாகவும் அமைந்தால், அது $f(x) = 0$ -ன் r மடங்கு மூலமாகும்.

(ii) $f(x)$, $f'(x)$ ஆகியவற்றின் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணியில் இருந்து $f(x) = 0$ -ன் பன்மடங்கு மூலங்களைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

எனவே,

- (i) $f'(x)$ ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.
- (ii) $f(x)$, $f'(x)$ - இவற்றின் மிகப் பெரிய பொதுக்காரணி காணவும்.
- (iii) இப் பொதுக் காரணியின் ஒவ்வொருவேறுபட்ட காரணி $f(x) = 0$ -ன் ஒவ்வொரு பன்மடங்கு மூலத்திற்றிய காரணியாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 82x + 12 = 0$, மடங்குத் தீர்வுகள் உடையது எனில், இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\text{இங்கு, } f(x) = x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 82x + 12$$

$$\therefore f'(x) = 5x^4 - 32x^3 - 15x^2 + 54x - 82$$

$$f(1) = 0 \quad f'(1) = 0$$

$$f(2) = 0 \quad f'(2) = 0.$$

$\therefore x=1, x=2$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் $f(x)=0$ -ன் இரு மடங்குத் தீர்வுகள்.

$$\therefore f(x) = (x-1)^2 (x-2)^2 (x-\alpha) \text{ எனக் கொள்க.}$$

$$= x^5 - 8x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 82x + 12$$

இரு புறமும் நிலைபெண் உறுப்புகளைச் சமப்படுத்த,

$$-4\alpha = 12 \quad \therefore \alpha = -3.$$

\therefore கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, 1, 2, 2, -3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9 = 0$, மடங்குத் தீர்வுகள் உடையது எனில், இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$\text{இங்கு } f(x) = 2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9$$

$$f'(x) = 8x^3 - 36x^2 + 38x - 6.$$

$f(x)$, $f'(x)$ -க்கு இடையேயுள்ள மிகப் பெரிய பொதுக் காரணிவைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் காண்போம்.

	$(2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9) \times 4$	$(2x^5 - 36x^4 + 38x - 6) \times 4$	
x	$8x^4 - 48x^3 + 76x^2 - 24x + 36$	$82x^5 - 144x^4 + 152x - 24$	$-x$
	$8x^4 - 36x^3 + 36x^2 - 6x$	$82x^5 - 78x^4 - 54x$	
	$(-12x^3 + 36x^2 - 18x + 36) \times 2$	$(-66x^5 + 206x - 24) \times 16$	
-3	$-24x^3 + 72x^2 - 36x + 72$	$-1666x^5 + 3296x - 384$	32
	$-24x^3 + 108x^2 - 114x + 18$	$-1058x^5 + 2574x + 1782$	
$-32x$	$-82x^3 + 78x + 54$	$722(x-2)$	
-18	$-82x^3 + 96x$		
	$-18x + 54$		
	$-28x + 54$		

$\therefore f(x)$, $f'(x)$ -ன் மிகப் பெரிய பொதுக் காரணி $(x-2)$.

$\therefore (x-2)^2$, $f(x)$ -ன் ஒரு காரணி.

$(2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 6x + 9)$ ஐ $(x-2)^2$ ஆல் வகுப்போம்.

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2} \quad -12 \quad 19 \quad -6 \quad 9 \\
 \underline{2} \\
 0 \\
 \underline{-12} \\
 0 \\
 \underline{19} \\
 0 \\
 \underline{-6} \\
 0 \\
 \underline{9} \\
 0
 \end{array}$$

$\therefore (2x^2 + 1)$ எவு ஆகும்.

எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மற்ற இரு மூலங்களும் $2x^2 + 1 = 0$ -ன் மூலங்களாகும். அதாவது $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

\therefore சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$, 3, 3 ஆகும்.

பயிற்சி 2 (j)

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுக்கும் பன்மடங்
கான மூலங்களைக் காண்க :

$$(1) 4x^4 + 24x^3 + 49x^2 + 45x + 25 = 0.$$

$$(2) 4x^3 - 12x^2 - 15x - 4 = 0$$

$$(3) x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36 = 0.$$

$$(4) 8x^3 - 20x^2 + 6x + 9 = 0.$$

$$(5) x^3 - x^2 - 4x^2 + 7x - 8 = 0.$$

$$(6) 27x^4 - 72x^3 + 64x^2 - 16 = 0.$$

$$(7) 12x^3 + 40x^2 + 39x + 9 = 0.$$

$$(8) x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0.$$

$$(9) x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$(10) x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x + 9 = 0.$$

2. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 + k = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு
இரண்டு மூலங்கள் சமமாகும் k -ன் மதிப்பு என்ன ?

3. $x^3 - 3qx + 2r = 0$ -ன் இரண்டு மூலங்கள் சமமாகும்
 $q^3 = r^2$ என்று காட்டு.

4. $x^n = p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ -க்கு
இரண்டு மூலங்கள் α ஆனால், $p_1x^{n-1} + 2p_2x^{n-2}$
 $+ 3p_3x^{n-3} \dots \dots \dots + np_n = 0$ என்று காட்டுக.

5. $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots \dots \dots + p_n = 0$ -க்கு மூன்று
மூலங்கள் α ஆனால் $n^3x^{n-1} + (n-1)^3p_1x^{n-2} +$
 $+ p_{n-1} = 0$ என்று திறவுக.

6. $x^3 + ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்கள் சமமானால், ஒவ்வொன்றும் $\frac{bc-d}{3a^2-b^2}$ என்று நிறுவுக.

7. $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்கள் சமமானால் ஒவ்வொன்றும் $\frac{bc-d}{2(ac-b^2)}$ என்று காட்டு.

8. $x^3 - 9x^2 + b^2x + c^2 = 0$ -ன் மூன்று மூலங்கள் சமமானால், $b^2 - 9a^2 + c^2 = 0$ என்று நிறுபி.

9. $x^4 + px^2 + q = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மூன்று சமமான மூலங்கள் இருக்க முடியாது என்று காட்டுக.

2-2. கட்டம் தேற்றம் 12 : (Sturm's Theorem)

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் ஒன்றுக் கொன்று வேறுபட்டவையாக இருக்கும். $f(x)$ -ன் மூலம் வரைகக் கொண்டு சாதிப்பு $f'(x)$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ ஐ $f_1(x)$ ஆல் வகுத்தால் வரும் மீதி $-f_2(x)$ என இருக்கட்டும். $f'(x)$ ஐ $f_2(x)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி $-f_3(x)$ எனவும், $f_2(x)$ ஐ $f_3(x)$ ஆல் வகுத்து வரும் மீதி $-f_4(x)$ எனவும் கொண்டு இவ்வாறு கடுத்தடுத்து வகுத்துச் சென்றால் இறுதியாகக் கிடைக்கும் சாதிப்பு $(-f_n(x))$ என்க. ஒரு மாறினாலும், $f(x), f'(x), f_2(x) \dots f_n(x)$, இவை கட்டம் சாதிப்புகள் எனப்படும்.

$f(x)$ -ன் 'கட்டம்' சாதிப்புகளில் $x=a$ எனப் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும், இச்சாதிப்புகளில் $x=b$ எனப் பிரதியிடுவதால் ஏற்படும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கைக்கும் இடையேயுள்ள வேறுபாடு, a, b க்கு இடையே $f(x) = 0$ -க்கு அமைத்த மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமனாகும்.

குறிப்பு: 0, ∞ என 'கட்டம்' சாதிப்புகளில் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையின் வேறுபாடு சமன்பாட்டின் கூட்டு மெய் மூலங்களைக் குறிக்கும்.

$-\infty, 0$ என்று 'கட்டம்' சாதிப்புகளில் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கும் குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கையின் வேறுபாடு சமன்பாட்டின் குறை மெய் மூலங்களைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3 - 7x + 7 = 0$ -ன் மெய் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைப்
அவற்றின் இருப்பிடத்தைப் காண்க.

$$f(x) = x^3 - 7x + 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 7$$

$$f_1(x) = 2x - 8 \quad f_2(x) = 1$$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
$(-\infty)$	-	+	-	+	3
0	+	-	-	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	0

\therefore சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் குறைந்த மதிப்புகடையது. மற்ற இரண்டும் கூட்டு மெய்யெண்கள்.

மேலும்

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	குறி மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை
-4	-	+	-	+	3
-3	+	+	-	+	2
-2	+	+	-	+	2
-1	+	-	-	+	2
1	+	-	-	+	2
2	+	+	+	+	0

$\therefore f(x)=0$ -ன் குறைந்த மூலம் -4, -3-க்கு இடைவெளியில்
கூட்டு மெய்யெண்கள் 1, 2-க்கிடையிலும் அமைந்து உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^3 - 8x + 1 = 0$ -ல் x மீது மூலங்களில் எண்ணிக்கையைப் பற்றி அவற்றின் இருப்பிடத்தைப் காண்க.

'ஸ்டீர்ன்' சரிபாக்கைக் கீழ்க்கண்ட மூலையில் கண்டுபிடிக்கிறது.

x	$\begin{array}{r} f(x) = x^3 - 8x + 1 \\ \underline{x^3 - x} \\ -8x + 1 \\ \text{குறி மாற்றியமைக்க,} \\ f(x) = 2x - 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} f_1(x) = 8x^2 - 8 \\ \text{மூன்றாம் படிக்குக் கிடைப்பது} \\ \underline{x^3 - 1} \\ \times 8 \\ 8x^3 - 8 \\ \underline{8x^3 - x} \\ x - 8 \\ \times 8 \\ 8x - 4 \\ \underline{8x - 1} \\ -5 \\ \text{குறி மாற்றி அமைக்க,} \\ f_2(x) = 8 \end{array}$
-----	--	---

$$\therefore f(x) = x^3 - 8x + 1$$

$$f_1(x) = x^3 - 1$$

$$f_2(x) = 2x - 1$$

$$f_3(x) = 8$$

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3'(x)$	குறி மாற்றல்களில் எண்ணிக்கை
$-\infty$	-	+	-	+	3
$+\infty$	+	+	+	+	0

எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் யாவும் மெய்யென்கனாகும்.

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	குறிமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை.
-2	-	+	-	+	2
-1	+	0	-	+	2
0	+	-	-	+	2
1	-	0	+	+	1
2	+	+	+	+	0

எனவே மூலங்கள் $(-2, -1), (0, 1) (1, 2)$ என்பவற்றிற்கிடையே அமைந்திருக்கும்.

குறிப்பு :

சமன்பாட்டின் மூலங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண 'ஸ்டர்ம்' சாச்டுகளின் குறியை தேவையாகியிருப்பதால் இச்சாச்டுகளைக் கூட்டு மதிப்புடைய திசையென்களால் பெருக்கியோ வகுத்தோ கொள்ளலாம்.

பயிற்சி 2 (k)

1. $x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களும் அற்பணியானவை என்று காட்டு.
2. $x^3 + 3p x^2 + 3q x + r = 0$ -ல் $p^3 < q$ ஆனால் இரண்டு மூலங்கள் அற்பணியானவை என்று திருப்தி.
3. $x^3 - 8x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் எனக் காண்க.
4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் உண்டு என்று காண்க.
(i) $x^3 - 5x + 1 = 0$. (ii) $x^3 - 7x + 7 = 0$
5. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை மெய்யான மூலங்கள் உண்டென்றும், அவைகள் ஆகவும் இடைவெளிகளிலும் காண்க.

$$(1) \quad x^5 - x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$(2) \quad x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 10x - 4 = 0.$$

$$(3) \quad x^5 + 8x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 2x - 2 = 0.$$

2.28. எண்ணித் தீர்வு (Numerical Solution)

$x^4 - 2x^3 + 2x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைப் போன்று எண்களைக் கெழுக்கனாகக் கொண்ட சமன்பாடுகள் எண்சார் சமன்பாடுகள் (Numerical Equation) எனப்படும். இத்தகைய சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவோ கற்பனையாகவோ இருக்கலாம். மெய்யெண் மூலங்களில் சில பொது அளவுள்ள எண்களும் இருக்கலாம்; மற்றவை பொது அளவுற்ற எண்களும் இருக்கலாம். இவ்வாறு அமைந்த மூலங்களைக் காண்பதற்கான சில வழி முறைகளை அடுத்து வரும் பகுதியில் விளக்குவோம்.

தேற்றம் 15:

ஒரு எய்தத்தான சமன்பாட்டில் x^n -ன் கெழு ஒன்றாகவும், கெழுக்கள் முழு எண்களாகவும் இருப்பின் அச்சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கணங்கிய தீர்வுகள் இருப்பின் அவை முழு எண்களாகியிருக்கும். மேலும் அவை யாகவும் சமன்பாட்டின் தனி உறுப்பின் காரணிகளாக இருக்கும்.

தேரீப்பு:

$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$ (p_1, p_2, \dots, p_n என்பவை முழு எண்கள்) என்ற சமன்பாட்டிற்கு, மூலங்களில் $\frac{a}{b}$ ஓர் அளவுக்கணங்கிய மூலமாக இருக்கட்டும். (a, b என்பவற்றில் சிதடிலே ஒன்றைத் தவிர பொதுக் காரணி கிடையாது.)

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n + p_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + p_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + p_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right) + p_n = 0$$

$$\therefore a^n + p_1 a^{n-1} b + p_2 a^{n-2} b^2 + \dots + p_{n-1} a b^{n-1} + p_n b^n = 0$$

$$\therefore \frac{a^n}{b^n} = -(p_1 a^{n-1} b + p_2 a^{n-2} b^2 + \dots + p_{n-1} a b^{n-1} + p_n b^n)$$

= ஒரு முழு எண்.

ஆனால் a, b என்பவை ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் (prime numbers)

ஆகையால் $\frac{p^n}{f}$ ஒரு பின்னம்.

ஆனால் ஒரு பின்னம் ஒரு முழு எண்ணிற்குச் சமையிருக்க இயலாது. ஆகையின் $\frac{p^n}{f}$ கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிற்கு மூலமாக இருக்க முடியாது. எனவே சமன்பாட்டிற்கு அளவுக்கணக்கிய மூலங்கள் இருப்பின் அவை முழு எண்களாகத்தான் இருக்க வேண்டும். இத்தகைய p ஒரு முழு எண் தீர்வாக இருக்கட்டும்.

$\therefore x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0$
முழுவதும் x ஆல் வகுத்தால்,

$$x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} + \frac{p_n}{x} = 0$$

$$\therefore \frac{p_n}{x} = -(x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \dots + p_{n-1})$$

= ஒரு முழு எண்.

$\therefore \frac{p_n}{x}$ -ம் ஒரு முழு எண்ணுயிருக்க வேண்டும். எனவே x , p_n -ன் ஒரு காரணிவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$ -ல் அளவுக்கணக்கிய மூலங்கள் உள்ளிடையில் சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 \text{ எனக் கொள்க.}$$

$f(x) = 0$ -ன் அளவுக்கணக்கிய மூலங்கள் முழு எண் ளாகிடுக்கும். மேலும் அவை -2 -ன் காரணிகளாகிடுக்கும்.

-2 -ன் காரணிகள், ± 1 , ± 2 .

$$f(1) = 0; f(2) = 0; f(-1) \neq 0.$$

$\therefore (x-1), (x-2)$ என்பவை $f(x)$ -ன் காரணிகள்.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 4 & 1 & -2 \\ & & & & & \\ 2 & & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{0} \\ & & & & & \\ & & \frac{2}{-1} & \frac{-2}{-1} & \frac{-2}{0} & \end{array}$$

$f(x)$ ஐ $(x-1)(x-2)$ ஆல் வகுத்து வரும் கவு x^2-x-1
 $x^2-x-1=0$ -ன் தீர்வு காண்டால்

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, 2, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

பயிற்சி 2 (1)

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளுக்கு அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் இருக்குமானால், அவற்றின் தீர்வு காண்க.

1. $x^3 - 6x^2 - 14x + 72 = 0$

2. $x^4 - 89x^2 + 46x - 168 = 0$.

3. $x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 86x - 80 = 0$

4. $x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 49x - 26x + 80 = 0$

5. $2x^5 - 81x^3 + 112x + 64 = 0$

6. $2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$

7. $28x^2 - 16x^2 - 8x + 1 = 0$.

8. $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$ -ன் தீர்வு காண்க.

9. $8x^4 - 28x^3 + 35x^2 + 31x - 30 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூல மூலங்களாகவா மூலங்கள் இரண்டு மூலங்கள் இருக்கும் அதிசயமானால், அதன் தீர்வைக் காண்க.

10. $2x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 11x^2 + 4x + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்கள் மூல மூலங்களாக இருப்பின், அதன் தீர்வைக் காண்க.

22-9. பின்னிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் : (தோராயத் தீர்வுகள்)
 (Approximate Solutions)

மூலங்கள் மூலம் :

இம்மூலத்தில் சமன்பாட்டின் அளவுக்கிணங்கிய மூலங்கள் எல்லாவற்றின் மதிப்பையும் காணலாம். இங்கு மூலத்தின் மதிப்பைப் படிப்படியாகக் கண்டு சீக்கிழிக்கும், மூலத்தில் கூட்டு மெய்யெண் மூலம் காணும் முறைமைப் பார்ப்போம்.

$f(x)=0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொள்வோம்.

(i) $f(x)$, $f(x+1)$ -இவை மாற்றுக் குறியீடுகள் பெறும் வகையில் x , $x+1$ என இரு அடுத்தடுத்த கூட்டு முழு எண்கள் இருப்பின், $f(x)=0$ -ன் ஒரு மூலம் x , $x+1$ -க் கிடையே அமைந்திருக்கும். அதன் முழு எண் பகுதி x ஆகும். நீர்வை x -ன் $a, b, c \dots$ எனக் கொண்டால் $a, b, c \dots$ மூலத்தின் தசம பாகத்தைக் குறிக்கும். x -ன் மதிப்பையடுத்து $a, b, c \dots$ என்பவற்றின் மதிப்புகளைப் படிப்படியாக ஒவ்வொன்றாகக் காண்கிறோம்.

(ii) இப்போது $f(x)=0$ -ன் மூலங்களை x அளவு குறைத்துக் கிடைக்கும் சமன்பாட்டைக் காண்போம். இவ்வாறு கிடைக்கும் சமன்பாட்டின் $\{ \phi(x)=0 \}$ எனக் கொள்க. ஒரு மூலம் $a, b, c \dots$ ஆக இருக்கும். அதாவது இம்மூலம் $0, 1$ -க் கிடையே இருக்கும்.

(iii) $\phi(x)=0$ -ன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கி மூன்றாவதாக $f_1(x)=0$ என்ற புதிய சமன்பாடு அமைப்போம். இச்சமன்பாட்டின் ஒருமூலம் $a, b, c \dots$ என இருக்கும். [ஏனெனில் இச்சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு மூலமும் $\phi(x)=0$ -ன் மூலங்களைப்போல் 10 மடங்காவிருக்கும்.] $a, b, c \dots$ -ன் முழு எண்பாகம் a , மேலும் $a, 0, 10$ இவற்றிற்கிடையே அமைந்திருக்கும். a -ன் மதிப்புக் காண $f_1(x)$ -ல் $0, 10$ இவற்றிற்கிடையேயுள்ள முழு எண்களின் மதிப்புகளில் அடுத்தடுத்து வரும் எந்த இரு முழு எண் மதிப்புகளுக்கு $f_1(x)$ குறி மாற்றம் அடைகிறது எனக் காணவேண்டும். இவ்வெண்களில் சிறிய எண் a ஆகும்.

(iv) இவ்வழியாகப் படிப்படியாக $b, c \dots \dots$ என்பவற்றின் மதிப்புகளையும் காண்கிறோம்.

குறை மெய்யெண் மூலங்கள்

$f(x)=0$ -க்கு - β ஒரு குறை மெய்யெண் நீர்வெனில்,

$f(-x)=0$ -க்கு β ஒரு கூட்டு மெய்யெண் மூலமாகும்.

எனவே, $f(x)=0$ -ன் குறை மெய்யெண் மூலங்கள் காண, $f(-x)=0$ -ன் கூட்டு மெய்யெண் மூலங்கள் காணுதல் வேண்டும். இதை மேற்குறித்த நுட்பங்கள் மூலதரப்படி அறிவோம். இம்மூலங்களுக்கு - குறியீடே. இவை $f(x)=0$ -ன் குறை மெய்யெண் மூலங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^3-8x+1=0$ -ன் கூட்டு மெய் மூலத்தைக் காண்க.

$f(x) = x^3 - 8x + 1$ எனக் கொண்டால், $f(x)$ ல் இரண்டு குறி மாற்றங்கள் இருப்பதால் $f(x)=0$ -க்கு இரண்டு கூட்டு மெய் மூலங்கள் இருக்கலாம்.

$$f(0) = 1 \quad (+)$$

$$f(1) = -1 \quad (-)$$

$$f(2) = +3 \quad (+)$$

எனவே, $f(x) = 0$ -க்கு $(0, 1)$ -க்கு இடையே ஒரு மூலமும், $(1, 2)$ -க்கு இடையே ஒரு மூலமும் உள்ளது. மூலத்தில் 1, 2-க் கிடையேயுள்ள மூலத்தைக் கணக்கிடுவோம். இதன் மூல எண் பாகம் 1. \therefore இம்மூலத்தை $1.000 \dots$ எனக் கொள்வோம். $f(x) = 0$ -ன் மூலங்களை 1 ஆல் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -8 & 1 \\ & 1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{-2} & \frac{-2}{-1} \\ & & \frac{1}{2} & \frac{2}{0} & \\ & & \frac{1}{8} & & \end{array}$$

மாதிரியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3 + 8x^2 - 1 = 0$ ஆகும்.

இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்க, கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$x^3 + 80x^2 - 1000 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

இதை $f_1(x) = 0$ எனக் கொண்டால்

$$f_1(5) < 0$$

$$f_1(6) > 0$$

$\therefore f_1(x) = 0$ -ன் ஒரு மூலம் 5, 6-க்கிடையே இருக்கும்.

$$\therefore x = 5$$

இதன் மூலங்களை 5 ஆல் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 80 & 0 & -1000 \\ & 5 & 175 & 875 & \\ \hline & 85 & 175 & -125 & \\ & 5 & 800 & & \\ \hline & 40 & 875 & & \\ & 5 & & & \\ \hline & 45 & & & \end{array}$$

மாத்தியமக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 45x^2 + 875x - 125 = 0$$

இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கி கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$f_1(x) = x^3 + 450x^2 + 87500x - 125000 = 0$$

$$f_1(8) < 0$$

$$f_1(4) > 0$$

எனவே, $f_1(x) = 0$ -ன் ஒரு மூலம் 8, 4-க்கிடையே இருக்கும்.

$$\therefore b = 8.$$

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 8 ஆல் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r}
 8 \mid 1 \quad 450 \quad 87500 \quad -125000 \\
 \underline{8} \quad 1368 \quad -116577 \\
 458 \quad 88588 \quad -5428 \\
 \underline{8} \quad 1368 \\
 458 \quad 40227 \\
 \underline{8} \\
 459
 \end{array}$$

\therefore மாத்தியமக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 459x^2 + 40227x - 5428 = 0$$

இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்கி கிடைப்பது

$$f_2(x) = x^3 + 4590x^2 + 402270x - 5428000 = 0$$

8428000ஐ 402270 ஆல் வகுத்தால் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலத்தில் தானாகவே இலக்கம் 2.

$$\therefore c = 2$$

எனவே, $f_2(x) = 0$ -ன் மூலங்களை 2 ஆல் குறைக்கவும்.

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad 4590 \quad 4032700 \quad -6428000 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 2 \quad 9184 \quad 8068768 \\
 4592 \quad 4031884 \quad -859282
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 2 \quad 9188 \\
 4594 \quad 4041072
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 2 \\
 4596
 \end{array}
 \end{array}$$

$$f_4(x) = x^3 + 45960 x^2 + 404107200 x - 859282000 = 0.$$

$859282000 < 404107200$. ஆதலால் இதன் ஒரு மூலம் 0, 1-க்கிடையே இருக்கும்.

$$\therefore d = 0$$

இதன் மூலங்களை 10 ஆல் பெருக்க,

$$f_5(x) = x^3 + 459600 x^2 + 4041072000 x - 859282000000 = 0.$$

இச்சமன்பாட்டில் $\frac{859282000000}{40410720000}$ -ன் மதிப்பு 8, 6-க்கு இடையே இருப்பதால் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் இவற்றிடையே இருக்கும்.

$$\therefore e = 8.$$

எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு கூட்டு மெய் மூலம் 1-58208.....ஆகும்.

இதேபோன்று, 0, 1-க்கிடையே உள்ள மூலத்தைக் காலூலம் முதலி யின்பெறுமாறு :

$$\begin{array}{r}
 8 \mid 1 \quad 0 \quad - .800 \quad 1000 (-.8472) \\
 \begin{array}{r}
 8 \\
 8 \\
 3 \\
 3 \\
 3 \\
 6 \\
 3 \\
 80
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 9 \\
 291 \\
 18 \\
 27900
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -878 \\
 127000 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 4 \\
 84 \\
 4 \\
 98 \\
 4
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 878 \\
 -26924 \\
 392 \\
 -2668200
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -107898 \\
 19804000 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 7 \\
 1027 \\
 7 \\
 1084 \\
 7
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 7189 \\
 -2848011 \\
 7288 \\
 -288577800
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -18522077 \\
 781928000 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 2 \\
 10412 \\
 2 \\
 10414 \\
 2
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 20684 \\
 -288858478 \\
 20828 \\
 -288885848
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 -527712952 \\
 264210048 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} \\
 10418
 \end{array}$$

எனவே $x^5 - 8x + 1 = 0$ -ன் மத்தொரு மூலம் $.8472$ ஆகும்.

2.30. திசுட்டன் முறை :

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தின் தொலைவு மதிப்பு α என இருக்கட்டும். $\alpha + h$ இன் மதிப்பு என்றும் $f(\alpha + h) = 0$.

$$\text{அதாவது, } f(\alpha) + hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2}f''(\alpha) + \dots = 0$$

h -ன் மதிப்பு மிகவும் சிறியதாக இருந்தால் h^2, h^3, \dots என்பவற்றைவிட, தோராயமாக $h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ என அறியலாம்.

எனவே $\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha_1$ (என்க) என்பது α ஐ விட இன்னும் சரியான தோராய மதிப்பாக இருக்கும். இம் மூலத்தின் மதிப்பை $\alpha_1 + h_1$ எனக் கொண்டால் $h_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$ எனப் பெறலாம். இவ்வாறு அடுத்தடுத்துச் செல்வதன் மூலம், $f(x)=0$ -ன் மூலத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்டுபெடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^2 - 2x - 5 = 0$ -ன் கூட்டு மெம்பென் மூலத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

$$f(x) = x^2 - 2x - 5 \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$f(2) = -1 < 0$$

$$f(8) = 19 > 0$$

$\therefore f(x) = 0$ -ன் கூட்டு மெம்பென் மூலம் ஒன்று 2, 8-க்கு இடையே உள்ளது. மேலும் 4, 6, 7-க்கு குறி விதிப்படி இச்சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு கூட்டு மெம்பென் மூலம்தான் உள்ளது.

மேலும் இம் மூலம் 2, 2.2 என்பவற்றிற்கிடையே உள்ளது எனவும் நினைக்கலாம். ஏனெனில் $f(2) < 0$, $f(2.2) > 0$. எனவே இங்கு $\alpha = 2.1$ எனக் கொள்வோம். $\alpha + h$ உண்மையான மதிப்பு எனில் $h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = -\frac{f(2.1)}{f'(2.1)}$

$$\frac{f(2.1)}{f'(2.1)} = + \frac{0.61}{11.28} = + 0.0548$$

$$\therefore \alpha + h = 2.1 + 0.0548$$

$$= 2.1548 = \alpha_1 \text{ (என்க)}$$

$$\therefore h_1 = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = -\frac{f(2.0948)}{f'(2.0948)} \\ = -0.0004852$$

$$\therefore f(x) = 0\text{-ன் மூலத்தின் தோராய மதிப்பு} \\ = 2.0948 - 0.0004852 \\ = 2.0943148$$

2-51. ஹார்னி முறைவின் கருக்கம்.

பொதுவாக, கருக்கிய வகுத்தலில் வகுபடும் எண்ணின் இலக்கங்கள் முடிந்துவிட்டால், வகுபடும் எண்ணிற்கு அடுத்தடுத்து பூச்சியம் இட்டு வகுப்பதற்குப் பதிலாக வகுக்கும் எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களை வலம் புறத்திலிருந்து அடுத்தடுத்து நீக்கி வகுக்கிறோம். இவ்வாறு செய்வதால் ஒரு நிலை அடைந்தபின் வகுக்கும் எண்ணின் இலக்கங்களை முடிவடைத்துவிடும். இவ்வாறு முடிவடைவதும் நிலை வகுபடும் எண்ணின் இலக்கங்களைப் பொறுத்தது. கடைசிவரக்க நிலைக்கும் சில உண்மையான எண்ணின் மூலம் கடைசி இலக்கத்திலேயே அல்லது கடைசி இரண்டு இலக்கங்களிலேயே தான் மாறுபடும். ஹார்னியின் முறைவிலும் இதே தத்துவத்தைக் கையாளுகிறோம்.

கருக்கிய வகுத்தல் துவங்கியவுடன் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் அடுத்தடுத்த குணகங்களுக்குப் பூச்சியத்தைச் சேர்ப்பதற்குப் பதிலாக, கடைசி உறுப்பிற்கு மூலனுள்ள உறுப்பின் குணகத்தில் கடைசி இலக்கத்தை நீக்கிவிடுகிறோம். இதே போன்று கடைசியிலிருந்து மூன்றாவதாய் வந்த குணகத்தின் வலம் பக்கத்திலிருந்து இரண்டு இலக்கங்களை நீக்கிவிடுகிறோம். இவ்வாறு மற்ற குணகங்களுக்கும் இலக்கங்களை நீக்குகிறோம். இவ்வாறு செய்வதன் மூலம் இன்றியமையாத இலக்கங்களை ஆவற்றின் நிலையில் வைத்துக்கொண்டு தேவையற்ற இலக்கங்களை அறவே நீக்கிவிடுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$ -ன் 1, 2-க்கிடையே அமைந்த மூலத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

முதலில் இம்மூலத்தின் மதிப்பை μ என்று தாமத தானங் களுக்கு வழக்கமான முறையில் காண்டுபிடித்து, பின்னர் கருக்கிய வகுத்தல் முறை உபயோகிப்போம்.

1	4	-4	-11	4
	<u>1</u>	<u>6</u>	<u>1</u>	<u>-10</u>
	6	1	-10	-80000
	<u>1</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>50878</u>
	6	7	-8000	-80840000
	<u>1</u>	<u>7</u>	<u>11488</u>	<u>72880581</u>
	7	1400	8488	-17548488
	<u>1</u>	<u>518</u>	<u>14808</u>	
	80	1918	28804000	
	<u>6</u>	<u>552</u>	<u>828187</u>	
	98	2468	24280187	
	<u>6</u>	<u>588</u>	<u>985801</u>	
	82	303600	26185788	
	<u>6</u>	<u>8128</u>		
	98	308728		
	<u>6</u>	<u>8188</u>		
	1040	311867		
	<u>8</u>	<u>8147</u>		
	1048	315014		
	<u>8</u>			
	1048			
	<u>8</u>			
	1048			
	<u>8</u>			
	1088			

இப்போது மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு.

$$x^4 + 1088 x^3 + 815014 x^2 + 26185788 x - 17548488 = 0.$$

இதிலிருந்து கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலத்தின் மதிப்பைத் தொடர்ந்து கண்டுபிடிக்கத் தீர்க்கண்ட கருக்கிய முறைையை உபயோகிக்கிறோம்.

$$1822 \quad 815014 \quad 25105788 - 17549439 \quad (1.886918675$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3156 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 18936 \\ 2586516 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 16218090 \\ -2586849 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3168 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 18972 \\ 2584487 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2801597 \\ -34752 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3168 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 286 \\ 258733 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 25801 \\ -8151 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 31 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 286 \\ 258018 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 7880 \\ -1471 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1260 \\ -191 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 179 \\ 12 \\ \hline \end{array}$$

பயிற்சி 2 (m)

நீழட்டை முறை ஓரஸ், 40ம் கேட்டுக்கொடுக்கின்ற சமச்
பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க :

1. $x^2 + x^2 + x - 100 = 0.$

2. $x^2 + 4x^2 - 4x^2 - 11x + 4 = 0.$

3. $x^2 - 4 = 0.$

நான்காம் முறையின் ஓரஸ் தீர்வு காண்க :

4. $x^4 - 208x^3 - 1069x - 1278 = 0.$

5. $x^3 - 4x - 7 = 0.$

6. $x^3 - 2x - 5 = 0.$

7. $x^3 - 6x - 13 = 0.$

8. $x^4 - 7x^2 + 18x - 8 = 0.$

9. $4x^3 - 18x^2 - 81x - 275 = 0.$

10. $2x^2 - 85x^2 - 85x - 87 = 0$.

11. தீவிரம் மூலங்களின் படி தீர்வு காண்க :

(i) $x^2 + x^2 + x - 100 = 0$.

(ii) $6x^2 + 10x^2 - 88 = 0$.

(iii) $4x^2 + x^2 + 6x + 45 = 0$.

12. தீவிர கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் கூட்டுமூலங்களை 2 பதின் பகுப்பு வரைக் காண்க :

(i) $x^2 - 8x - 4 = 0$.

(ii) $x^2 - 8x^2 + 6x - 8 = 0$.

(iii) $x^2 + x^2 - 7x - 8 = 0$.

(iv) $x^2 - 6x - 11 = 0$.

(v) $x^2 - 8x - 40 = 0$.

13. தீவிர கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் குறையெண் மூலங்களை 3 பதின் பகுப்பு வரைக் காண்டுவிட :

(i) $x^2 - x^2 + 12x + 24 = 0$.

(ii) $2x^2 - 6x^2 + 2x^2 - 4x - 40 = 0$.

(iii) $8x^2 + 6x^2 + 2x + 8 = 0$.

மூப்படி, நர்ப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல்

ஒரு மூப்படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு

$p_2x^2 + 8p_1x^2 + 8p_2x + p_3 = 0$ என இருக்கட்டும்.

இச்சமன்பாட்டின் மூலங்களை 'h' ஆல் குறைத்து மாற்றி வரைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் x^2 -ன் கொடுக்கப்பட்ட பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்துவோம்.

$p_2(x + h)^2 + 8p_1(x + h)^2 + 8p_2(x + h) + p_3 = 0$

$p_2x^2 + 8(p_2h + p_1)x^2 + 8(p_2h^2 + 2p_1h + p_2)x + (p_2h^2 + 8p_1h^2 + 8p_2h + p_3) = 0$

$\therefore p_2h + p_1 = 0$ ஆகவே $h = -p_1/p_2$

∴ x^2 உறுப்பு நீக்கலாக அமைந்த சமன்பாடு

$$p_2 x^2 + 3 \left(\frac{p_2 p_3 - p_1^2}{p_3} \right) x + \left(\frac{p_2 p_3^2 - 3 p_2 p_1 p_3 + 2 p_1^3}{p_3^2} \right) = 0.$$

இதன் மூலங்களை p_2 ஆல் பெருக்க,

$$x^2 + 3 (p_2 p_3 - p_1^2) x + (p_2 p_3^2 - 3 p_2 p_1 p_3 + 2 p_1^3) = 0$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$p_2 p_3 - p_1^2 = H$ எனவும், $p_2 p_3^2 - 3 p_2 p_1 p_3 + 2 p_1^3 = G$ எனவும் கொண்டால், இச்சமன்பாட்டை

$$x^2 + 3 H x + G = 0 \text{ என எழுதலாம்.}$$

இதை ஒரு மூப்படிச் சமன்பாட்டின் திட்ட அமைப்பு எனக் கொள்கிறோம்.

பொது அமைப்பிலுள்ள மூப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனக் கொண்டால் திட்ட அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $p_2 \alpha + p_1, p_2 \beta + p_1, p_2 \gamma + p_1$ ஆகும். எனவே மூத்த வன் குறித்த மூப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் திட்ட அமைப்பிலுள்ள சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைப் பொறுத்து அமைவும்.

2-38. மூப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மைகள்

$f(x) = x^2 + 3 H x + G = 0$ என்பது திட்ட அமைப்பிலுள்ள மூப்படிச் சமன்பாடு ஆகும். இதன் மூலங்களின் இரண்டின்மூன்று வேறுபாடுகளில் லக்கங்களின் மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு $F(x) = x^3 + 18 H x^2 + 81 H^2 x + 27 (G^2 + 4 H^3) = 0$

அதாவது α, β, γ என்பவை $f(x)=0$ -ன் மூலங்கள் எனில், $(\alpha-\beta)^2, (\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha)^2$ என்பவை $F(x)=0$ -ன் மூலங்கள் ஆகும். கற்பனை மூலங்கள் இரண்டின்மூன்று அமைப்புகளின் $f(x)=0$ -ன் ஒரு மூலமேனும் பெய்யெண் மதிப்புடையதாக இருக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} \text{இப்போது } (\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2 \\ = -27(G^2 + 4H^3) \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{மேலும் } (\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2 \\ + (\gamma-\alpha)^2 (\alpha-\beta)^2 = 81H^2 \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

$$(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = -18H \quad \dots \quad (3)$$

$$(a) \quad G^2 + 4H^3 = 0 \text{ எனில், } \alpha - \beta = 0 \text{ அல்லது } \beta - \gamma = 0 \text{ அல்லது } \gamma - \alpha = 0.$$

எனவே, $f(x) = 0$ -ன் இரண்டு மூலங்களேனும் ஒன்றுக் கொன்று சமபாதம் வேண்டும். மேலும் $H \neq 0$ எனில், $f(x) = 0$ -ன் இரண்டு இரண்டு மூலங்கள் சமபாதிக்கும்.

ஆனால் $H=0$, $G=0$ எனில் $\alpha-\beta = \beta-\gamma = \gamma-\alpha = 0$. [(8), (1) இக்குத்து]

எனவே $f(x) = 0$ -ன் எல்லா மூலங்களும் சமபாதம்.

(b) $G^2 + 4H^2 < 0$ எனில் H எதிர்மதிப்புடையதாகிவிடுத்தல் வேண்டும். மேலும் $F(-x) = -x^3 + 18Hx^2 - 81H^2x + 27(G^2 + 4H^2)$ -ல் எல்லா உறுப்புகளும் எதிர்மதிப்பு உடையன வாதலால் $F(x) = 0$ -ல் குறைமெய்யெண் மூலங்களே தீடையாது $(\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2 > 0$ ஆதலால் எல்லா மூலங்களும் மெய்மதிப்பு உடையன. எனவே α, β, γ என்பவை ஒன்றுக் கொன்று மாறுபட்ட கூட்டு மெய்யெண் மதிப்புடைய மூலங்களாகும்.

(c) $G^2 + 4H^2 > 0$ எனில் $(\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2$ குறைமதிப்பு உடையது. α, β, γ என்பவற்றுள், அதாவது $f(x) = 0$ -ன் மூலங்களில் இரண்டு கற்பனையாகும். ஏனெனில் α, β, γ என்பவை மெய் மதிப்பு உடையவை எனில், $(\alpha-\beta)^2 (\beta-\gamma)^2 (\gamma-\alpha)^2$ குறைமதிப்பு உடையதாகிவிடுக்க முடியாது. மேலும் $\alpha\beta\gamma = -G$, எனவே இத்தகைய மூலவாத மூலமான மெய்யெண் மூலத்தின் குறி G -ன் குறிக்கு மாறுபட்டிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3 - 7x + 8 = 0$ -ன் மூலங்களின் தன்மைகளைக் காண்க.

இங்கு $H = -\frac{7}{6}$, $G=8$. $\therefore G^2 + 4H^2 = 64 - \frac{1872}{27} = -\frac{400}{27}$. எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண் மதிப்புடையவை.

பயிற்சி 2 (ii)

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மைகளைக் காண்க :

$$1. \quad x^3 - 8x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$2. \quad x^3 + 8x^2 + 9x + 4 = 0$$

$$3. \quad x^3 + 2x + 1 = 0$$

$$4. \quad x^3 + x^2 - 5x + 8 = 0.$$

நீட்ட அமைப்பிலுள்ள முப்படிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல் :
கார்டன் முறை (Cardan's Method)

$p_0x^3 + 3p_1x^2 + 3p_2x + p_3 = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டை, $x^3 + 3Hx + G = 0$ என்ற நீட்ட அமைப்பில் எழுதலாம் என முன்பு கண்டோம். இப்பொழுது இதன் தீர்வுகளைக் கார்டன் முறைப்படி ஆற்றுவோம்.

$$x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}} \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore x^3 = p + q + 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}(p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}})$$

$$\text{அதாவது } x^3 - 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}x - (p+q) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{கொடுத்துள்ள சமன்பாடு } x^3 + 3Hx + G = 0 \quad \dots \quad (2)$$

இவை இரண்டும் ஒரே சமன்பாட்டைக் குறித்தால்

$$p + q = -G,$$

$$p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}} = -H$$

$$\text{அதாவது } pq = -H^3$$

$$\begin{aligned} \text{ஆகவே } (p-q)^2 &= (p+q)^2 - 4pq \\ &= G^2 + 4H^3 \end{aligned}$$

$$\therefore p-q = \sqrt{G^2 + 4H^3}$$

$$p+q = -G.$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2} [-G + \sqrt{G^2 + 4H^3}] \\ q &= \frac{1}{2} [-G - \sqrt{G^2 + 4H^3}] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

$$\text{மேலும் } q^{\frac{1}{3}} = -\frac{H}{p^{\frac{1}{3}}}$$

எடுத்துக்கொண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு $x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}}$.

p -ன் மூப்படி, மூலங்களின் மதிப்புகளும் மூன்றாவை $p^{\frac{1}{2}}$, $wp^{\frac{1}{2}}$, $w^2 p^{\frac{1}{2}}$ ஆகும். இவறு w என்பது ஒன்றின் மூப்படி, மூலங்களின் கற்பனை மூலங்களும் ஒன்று. இவற்றிற்கேற்ப q -ன் மூப்படி, மூலங்களின் மதிப்புகள் மூன்றாவை $-\frac{H}{p^{\frac{1}{2}}}$, $-\frac{H}{wp^{\frac{1}{2}}}$, $-\frac{H}{w^2 p^{\frac{1}{2}}}$, அதாவது $-\frac{H}{p^{\frac{1}{2}}}$, $-w^2 \frac{H}{p^{\frac{1}{2}}}$, $-w \frac{H}{p^{\frac{1}{2}}}$, எனவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\sqrt[3]{p} = \frac{H}{p}$, $w\sqrt[3]{p} = \frac{w^2 H}{p}$, $w^2 \sqrt[3]{p} = \frac{w H}{p}$ என்பன ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$x^3 - 18x - 85 = 0\text{-ன் தீர்வு காண்க.}$$

$$x = p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}} \text{ என்க.}$$

$$\therefore x^3 - 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}}x - (p+q) = 0$$

x -ன் சமன்பாட்டினைக் கொடுக்கின்ற சமன் செய்தால்,

$$p+q = 85$$

$$p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\therefore pq = 27$$

$$\begin{aligned}\therefore pq &= \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} \\ &= \sqrt{1225 - 634} \\ &= \sqrt{591} = 19\end{aligned}$$

$$\therefore p = 27$$

$$q = 8.$$

\therefore கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம்

$$p^{\frac{1}{3}} + q^{\frac{1}{3}} = 3 + 2 = 5$$

$x^3 - 18x - 85$ -ஐ $(x-5)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது

$$x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 5 & 1 & 0 & -18 & -35 \\ & & 5 & 25 & 35 \\ \hline & & 5 & 7 & 0 \end{array}$$

\therefore சமன்பாட்டின் மற்ற மூலங்கள் $\frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2}$ ஆகும்.

பயிற்சி 2 (c)

கீழ்க்கண்ட ஸ்ப்படிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண்க.

1. $x^3 + 6x - 20 = 0$

2. $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

3. $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$

4. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

5. $x^3 + x^2 - 9x + 18 = 0$

2.34. நர்ப்படிச் சமன்பாடு (Biquadratic) — பெர்ரி மூலம் (Ferrari's Method)

$p_3x^4 - 4p_1x^3 + 6p_2x^2 + 4p_3x + p_4 = 0$ என்பதை ஒரு நர்ப்படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகக் கொள்வோம். இதன் மூலங்களை p_3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$x^4 + 4p_1x^3 + 6p_2p_3x^2 + 4p_3p_3x + p_4p_3 = 0$$

அதாவது

$$x^4 + 4px^3 + 6gx^2 + 4rx + s = 0 \quad (\text{என்க.})$$

இரு புறமும் $(ax+b)^4$ ஐக் கூட்ட,

$$\begin{aligned} x^4 + 4px^3 + (6g + a^4)x^2 + (4r + 4ab)x + (s + b^4) \\ = (ax+b)^4 \end{aligned}$$

இதில் இடப் புறம் ஒரு சரியான வர்க்கவடிவமெchoக்கும்படி, a, b -ன் மதிப்புகளைக் காண்போம்.

அதாவது இடப் புறம் $=(x^2 + 2px + t)^2$ எனக் கொள்வோம்.

∴ x -ன் சமன்பாடுகளின் கொடுக்களை ஒப்பிட்டு, எம்,

$$\left. \begin{aligned} 8q + 2t &= 4p^2 + 2t \\ 4r + 2ab &= 4pt \\ x + b^2 &= t^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad \dots \quad (A)$$

இச் சமன்பாடுகளினின்றும் a, b ஐ நீக்கக் கிடைப்பது

$$(4p^2 + 2t - 8q)(t^2 - x) = \frac{(4pt - 4r)^2}{4} = 4(pt - r)^2$$

$$\text{ஆகவே, } 2t^2 - 8qt^2 + (8pr - 8x)t + 8qs - 4p^2s - 4r^2 = 0$$

அதாவது,

$$t^2 - 8qt^2 + (4pr - x)t - (2p^2s + 2r^2 - 8qs) = 0 \quad \dots \quad (B)$$

t -ன் அமைந்த இம்முன்படிச் சமன்பாட்டிற்கு ஒரு மெய்யெண் தீர்வெனும் உண்டு. அதைக் கண்டுபிடித்தால் (A)-யிலிருந்து a, b -ன் மதிப்புகளைக் காணலாம். ∴ t, a, b என்பவற்றின் மதிப்பு களைக் கொண்டு,

$$(x^2 + 2px + t)^2 = (ax + b)^2 \text{-ன் தீர்வுகள் காணலாம்.}$$

$$\therefore x^2 + 2px + t = \pm (ax + b)$$

குறிப்பு :

$$x^2 + 2px + t - (ax + b) = 0 \text{-ன் தீர்வுகள் } \alpha, \beta \text{ எனவும்,}$$

$x^2 + 2px + t + (ax + b) = 0$ -ன் தீர்வுகள் γ, δ எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \alpha\beta = t - b \quad \gamma\delta = t + b \quad \text{ஆதலால்}$$

$$t\text{-ன் ஒரு மதிப்பு } \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}$$

$$\text{எனவே (B) ன் மூலங்கள் } \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}, \quad \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{2}, \quad \frac{\gamma\delta + \beta\delta}{2}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x^2 + 2x^2 - 7x^2 - 8x + 12 = 0 \text{-ன் தீர்வு காண்க.}$$

இருபுறமும் $(ax+b)^2$ ஐக் கூட்டி,

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 + (ax+b)^2 = (ax+b)^2$$

$$x^4 - 2x^3 + (a^2 - 7)x^2 + (2ab - 8)x + 12 + b^2 = (x^2 + x + q)^2 \text{ என்க.}$$

$$\therefore a^2 - 7 = 1 + 2q$$

$$\therefore a^2 = 2q + 8 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$2ab - 8 = 2q$$

$$\therefore ab = q + 4 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$12 + b^2 = q^2$$

$$\therefore b^2 = q^2 - 12 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(1), (2), (3)-இவற்றிலிருந்து

$$(q+4)^2 = (q^2-12)(2q+8)$$

அதாவது $(q+4)[(q+4)-2(q^2-12)] = 0$

$$\therefore q = -4 \quad \text{அல்லது}$$

$$2q^2 - q - 28 = 0$$

$$q = 4, -8\frac{1}{2}$$

$q = 4$ என்ற மதிப்பைக் கொண்டால்

$a = 4$, $b = 2$ எனக் கிடைக்கிறது.

\therefore கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$(x^2 + x + 4)^2 = (4x + 2)^2 \text{ என எழுதலாம்.}$$

\therefore இதன் மூலங்கள்

$$x^2 + x + 4 = (4x + 2), \text{ அதாவது}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$x^2 + x + 4 = -(4x + 2), \text{ அதாவது}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ என்பவற்றின் மூலங்களாகும்.}$$

\therefore கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் 1, 2, -2, -3, ஆகும்.

பயிற்சி 2 (p)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் தீர்வு காண்க :

1. $x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 8x - 10 = 0$
2. $x^4 - 12x - 6 = 0$
3. $x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = 0$
4. $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 10x + 8 = 0$
5. $x^4 - 8x^2 - 42x - 40 = 0$
6. $4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x - 12 = 0$
7. $x^4 - 12x^2 + 24x + 140 = 0$
8. $x^4 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$
9. $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 8 = 0$
10. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

2.55. கோட்டுருவப் படங்களைக் கொண்டு நேரடியாகத் தீர்வுகள் காண்க (Graphical solutions of equations)

$f(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$y = f(x)$ -ன் கோட்டுருவப் படம் வரைக. இவ்வரைகோடு x அச்சை எங்கெங்கு வெட்டுகிறதோ அப்புள்ளிகளுக்குக் கொலாம் $y = f(x) = 0$. எனவே இவ்வரைகோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளுக்குரிய x -மதிப்புகள் எல்லாம் $f(x) = 0$ -ன் தீர்வுகளாகும். இப்போது ஐம்பது, நூற்பதுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் காண, கோட்டுருவப் படங்கள் வரைந்து அவை x அச்சை வெட்டும் இடங்களைக் கொண்டு தீர்வு காண்பது பற்றி நோக்குவோம்.

ஐம்பதுச் சமன்பாடு :

சமன்பாட்டை $x^2 + ax + b = 0$ எனக் கொள்வோம்.

(இங்கு x^2 உறுப்பு இல்லை என்பதைக் காண்க.)

முறை 1:

சமன்பாட்டை

$$x^2 = -(ax+b) \text{ எனக் கொண்டால்}$$

$$y = x^2$$

$$y = -(ax+b) \text{ என்ற இரு மடங்களை வரையோம்.}$$

$y = -(ax+b)$ என்பது ஒரு நேர் கோடு. $y = x^2$ ஒரு ஒப்படி வளை வரை. இவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று வெட்டு மிடங்களில்

$$x^2 = -(ax+b)$$

$$\therefore x^2 + ax + b = 0.$$

எனவே $y = x^2$, $y = -(ax+b)$ என்பவை வெட்டுகின்ற புள்ளிகளில் x ஆகத் தொகையாக $x^2 + ax + b = 0$ -ன் மூலங்கள் வரும். $y = x^2$, $y = -(ax+b)$ - இவை ஒன்று புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளலாம்; ஆகவே (9) ஒரு புள்ளியில் மட்டும் வெட்டிக் கொள்ளலாம். முதல் நிலையில் சமன்பாட்டிற்கு மூன்று மெய் பெண் தீர்வுகளும் இரண்டாவது நிலையில் ஒரு மெய்பெண் தீர்வும் இரண்டு கற்பனைத் தீர்வுகளும் உண்டு.

முறை 2 :

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ ஐ}$$

x ஆல் பெருக்க,

$$x^3 + ax^2 + bx = 0$$

$$\text{அதாவது } (x^3)^2 + x^2 + (a-1)x^2 + bx = 0$$

இதில் $y = x^2$ எனக் கொண்டால்,

$$y^2 + x^2 + (a-1)y + bx = 0$$

$$\text{இது } \left(-\frac{b}{2}, -\frac{a-1}{2} \right) \text{ என்ற புள்ளியை மையமாகக்}$$

கொண்ட வட்டம். இல் வட்டமும் $y = x^2$ என்ற பரவளையமும் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆகத் தொகையாக கொடுத்தால்தான் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இங்கு $x = 0$ என்ற தீர்வை நீக்க வேண்டும். ஏனெனில் சமன்பாட்டை x ஆல் பெருக்குகிறோம்.

குறிப்பு :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என்ற மூன்றாவது சமன்பாடு அமைத்திருப்பின் இதன் மூலங்களை h ஆல் குறைத்து, புதிய சமன்பாட்டில் x^3 உறுப்பை நீக்கவும். இம்மாதிரி மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3 + Ax + B = 0$ என்ற மூன்றாவது இருக்கும். இதன் தீர்வுகளை மேற்குறித்த இரு வழிகளால் ஏதேனும் ஒன்றால் கண்டு பிடிக்கலாம்.

தேடிவராத தீர்வு காண வேண்டின், சமன்பாட்டை

$$ax^3 = -(bx^2 + cx + d)$$

அதாவது $x^3 = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$ என எழுதலாம்.

$$y = x^3, y = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$$

என்பவற்றின் கோட்டுருவப் படங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகளை கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$y = x^3$ ஒரு மூப்படிப் பரவளைவம்.

$y = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$ ஒரு பரவளைவம். இவ்விரண்டும்

கட்டாயம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டும். மேலும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் வெட்டலாம்; ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் சமன்பாட்டிற்கு ஒரே ஒரு மெய்யெண் மூலம்தான் உண்டு எனக் கணவாம்.

தர்ப்படிச் சமன்பாடு :

ஒரு தர்ப்படிச் சமன்பாடு $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ என இருக்கட்டும்.

இச்சமன்பாட்டை $\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d = 0$ என எழுதலாம். அதாவது,

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 + x^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2 + cx + d = 0$$

இ. க. - 21

$$\text{இங்கு, } x^2 + \frac{a}{2}x = y \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனப் பிரதிபலிக்கப்படும்.

$$y^2 + x^2 + \left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right) \left(y - \frac{a}{2}x\right) + cx + d = 0$$

அதாவது,

$$x^2 + y^2 + \left\{c - \frac{a}{2} \left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right)\right\} x + \left(b - 1 - \frac{a^2}{4}\right) y + d = 0 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (1), ஒரு பரவளையத்தையும் சமன்பாடு (2), ஒரு வட்டத்தையும் குறிக்கும். இவ்விரு வளை வரைகணையும் கோட்டுருவப் படத்தில் வரைத்தால் இவை ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுக் கொடுத்துள்ள சமன் பாட்டின் மூலங்களாகும்.

குறிப்பு: கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை எளிய மூலையில் அமைக்க அதன் மூலங்களை h என்றும் மதிப்பாகக் குறைத்து, சமன்பாட்டை $x^2 + Ax^2 + Bx + C = 0$ என்ற அமைப்பில் கொண்டு வரலாம். $\left[\text{இங்கு } h = -\frac{a}{4} \right]$.

எனவே, $y = x^2$ எனக் கொண்டால்,

சமன்பாட்டை $x^2 + x^2 - x^2 + Ax^2 + Bx + C = 0$ என எழுத,

$y^2 + x^2 - y + Ay + Bx + C = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$y = x^2 \text{ என்ற பரவளையம்,} \quad \dots \quad (1)$$

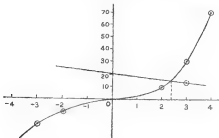
$$x^2 + y^2 + Bx + (A - 1)y + C = 0 \text{ என்ற வட்டம்,} \quad \dots \quad (2)$$

இவை ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவு சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இவற்றுடன் h ஐக் கூட்டி, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்களை கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் $x^3 + 2x - 20 = 0$ -ன் மூலத்தை மூதல் பதின் பருப்பு இடத்திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(செ.ப.க.)



படம் 8.

$f(x) = x^3 + 2x - 20$ எனக் கொண்டால் $f(x)$ -ல் ஒரே ஒரு குறி மாற்றமும் $f(-x)$ -ல் குறி மாற்றங்களும் இல்லாமலாகவும் அமைந்திருப்பதால் $f(x) = 0$ -க்கு ஒரே ஒரு மெய்யெண் மூலம் (கூட்டு மதிப்புடையது) உள்ளது என அறிகிறோம்.

$$x^3 = 20 - 2x$$

இப்பொழுது $y = x^3$

$y = 20 - 2x$. இவற்றின் கோட்டுருவப் படங்களை வரைக. இவை சந்திக்கும் புள்ளியின் x ஆயத் தொலை கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலமாகும். அதாவது சமன்பாட்டின் மூலம் வரை படத்திலிருந்து, 2.45 அதாவது 2.5.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

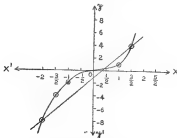
கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் தீர்வு காண்க : $2x^3 - 15x^2 + 31x - 12 = 0$.

சமன்பாட்டின் மூலங்களை $\frac{18}{2}$ ஆம் குறைக்கக் கிடைக்கும் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^2 - \frac{18}{4}x + \frac{8}{2} = 0$$

$$\text{அதாவது } x^2 = \frac{18}{4}x - \frac{8}{2}$$

எனவே $y = x^2$; $y = \frac{18}{4}x - \frac{8}{2}$ என்பவற்றின் வரைபடங்களை வரையவும்.



$y = x^2$, $y = \frac{18}{4}x - \frac{8}{2}$ இவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் வரைபடத்திலிருந்து மூலங்களின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$, -2 , $\frac{3}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$, $-2 + \frac{5}{2}$, $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$ அதாவது 3 , $\frac{1}{2}$, 4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^3 + x^2 + 4x - 7 = 0$ -ன் மொத்தமொன் மூலங்களைக் காட்டுவது படத்தின் வாயிலாகக் காண்க.

$y = x^2$ எனில், இச்சமன்பாட்டை $y^2 + x^2 + 4x - 7 = 0$ என எழுதலாம். இது $(-2, 0)$ ஐ மையமாகவும், $-\sqrt{3}$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும். எனவே, $y = x^2$;



படம் 4

$x^2 + y^2 + 4x - 7 = 0$ என்பவற்றின் கோட்டுருவப் படங்களை வரைவோம். இவற்றிற்குப் பொதுவாய் அமைந்த புள்ளிகளின் x ஆவத் தூரங்கள் சமன்பாட்டின் மூலங்கள். இவ்வுத் சமன்பாட்டின் மெய்யெண் மூலங்கள் $-1.85, 1.08$ ஆகும்.

பயிற்சி 2 (ஏ)

1. $x^2 - 8x - 7 = 0$ -ன் தீர்வைக் கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் காண்க. இம் மதிப்புகளை தராதல் மூலதரீதியடி இரண்டு பதின் பகுப்பு இடங்களிலுக்குத் திருத்தமாகக் காண்டு ஒப்பிடுக.

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் கோட்டுருவப் படத்தின் மூலம் காண்க.

(i) $x^2 - 6x^2 + 8x - 8 = 0$

(ii) $4x^2 - 81x - 10 = 0$

(iii) $8x^2 - 8x^2 - 5x + 6 = 0$

(iv) $x^2 - 8x + 1 = 0$

(v) $x^2 - 0.2x^2 - 1.2x + 1.8 = 0$

- (vi) $2x^2 - x^2 - 6x - 10 = 0$
 (vii) $x^2 - 7x^2 + 2x + 2 = 0$
 (viii) $y^4 - 12y^3 + 28y^2 + 96y - 288 = 0$
 (ix) $2x^2 - 3x^2 - 8x - 2 = 0$
 (x) $6x^4 - 25x^3 + 37x^2 - 26x + 6 = 0$
 (xi) $x^4 + x^2 + 4x - 7 = 0$
 (xii) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0.$

வினாக்கள்

பகுதி 1 (a)

1. 6
2. 0
3. 80
4. 0
5. 0
7. $-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
17. $9abc$
22. $-8; \pm i$
24. $\frac{1}{2}; -14.$
25. $0; 0; 0; -(a+b+c+d)$
26. $(a+b+c+d); a+c-b-d; \pm \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$
27. $-\frac{6}{5}, -1, \frac{14}{5}$
28. $(1+a^2+b^2)^2$

பகுதி 1 (d)

9. $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

பயிற்சி 1 (c)

1. $x=4, y=2, z=3$

2. $x=3, y=4, z=5$

$$3. \quad x = \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}; \quad y = \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)}; \\ z = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}$$

4. $x=1, y=3, z=5$

5. $x=3, y=1, z=2$

6. $k=5.$

பயிற்சி 2 (a)

6. $x^2 - x^2 + 3x - 2 = 0$

9. 3, 5

10. $14x^2 - 28x + 9 = 0.$

பயிற்சி 2 (b)

1. $3 \pm \sqrt{10}, 1 \pm 2i.$

2. (a) $1, \frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{2}$

(b) $\frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}), -1 \pm i\sqrt{2}$

(c) $3 \pm \sqrt{3}, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} (2 \pm \sqrt{3})$

(d) $1 + 2i, 1$

(e) $\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{5} + \frac{4}{3}$

(f) $\pm \sqrt{2} \pm i \frac{3(1 \pm i\sqrt{7})}{4}$

(g) $5 \pm 5i, \frac{1}{2}, -2$

$$(h) -2 \pm \sqrt{8}; \quad 1 \pm i$$

$$(i) 2 \pm i\sqrt{7}; \quad \frac{5}{8}$$

$$(j) 2 \pm i\sqrt{8}; \quad -2 \pm i.$$

பயிற்சி 2 (c)

$$(1) 5, 4, -4$$

$$(2) 2, 2, -1$$

$$(3) 5, 4, -1$$

$$(7) 1, 2, 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$(8) \pm \sqrt{5}, 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$(11) -1, 5, 1, 3$$

$$(12) 8, 8, \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(14) \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(16) 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$(18) k = -24; 2, -4, 6$$

$$(19) \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

$$(20) -5, -2, 1, 4$$

$$(21) -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

$$(22) \frac{1}{2}, 1, 3, 0.$$

பயிற்சி 2 (d)

$$1. (i) q^3 - 2pr \quad (ii) pq - r \quad (iii) pq - 2r \quad (iv) \frac{pq}{r} - 2.$$

$$2. (i) \frac{q^3 - 2pr}{r^2} \quad (ii) \frac{p^2 - 2q}{r^2} \quad (iii) \frac{pq}{r} - 2.$$

$$(iv) 3p^2 - 16pq + 64r \quad (v) q^2 - 2pq + 3r^2$$

8. (i) $pr-4r$ (ii) $p^2-4p^2q+2q^2+4pr-4r$.

4. (i) $\frac{q}{r}$ (ii) $r^2+(q-1)^2$

7. (i) -8 (ii) $\frac{17}{4}$

8. (i) $x^3+2px^2+(p^2+q)x+pq-r=0$.

(ii) $x^3-2qx^2+(q^2+pr)x+r^2-pqr=0$.

9. (i) $-\frac{a_2-1}{a_2}$ (ii) $\frac{1}{a_1^3} [a_2a_4-4a_1a_3]$

(iii) $\frac{1}{a_1^3} [5a_2a_1+a_3a_2-a_4a_3]$

10. 795. 15. $x^3+x^2-2x-1=0$.

16. 128. 19. 99, 795

பயிற்சி 2 (e)

1. $x^4-6x^3+8x^2-2x^2+2x-2=0$.

2. $x^5+8x^4+x^3+x^2+7x-2=0$.

3. $x^4+6x^3-26x+27=0$.

4. $x^4-7x^3+48x^2-252x+482=0$

5. $x^4-2x^3+6x-6=0$.

6. $x^3-15x^2-14x+2=0$.

7. $x^3-24x^2+9x-24=0$.

8. $x^4-4x^3+12x^2-15x+27=0$.

9. $2y^4-5y^3-7y^2+8y-1=0$.

10. $4y^4-2y^3+8y^2-2y-1=0$.

பயிற்சி 2 (f)

1. $3 \pm 2\sqrt{2}$, $2 \pm \sqrt{2}$

2. ± 1 , 2 , $\frac{1}{2}$, $(5 \pm i\sqrt{11})/6$

3. $-1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} (2 \pm \sqrt{5})$
4. $1, \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5}i), \frac{1}{2} (2 \pm \sqrt{5})$
5. $\frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{5}), 1, 1$
6. $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
7. $\pm i, 2, \frac{1}{2}$
8. $-1, -1, -1, 2 \pm 2\sqrt{2}$
9. $-1, -1, -1, \frac{1}{2} (-1 \pm i\sqrt{5})$
10. $-1, \frac{1}{2} (-1 \pm i\sqrt{5}), -2 \pm \sqrt{5}$
11. $1, 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}$
12. $1, \frac{1}{2} (2 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{5})$
13. $\pm 1, \pm \sqrt{\frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{5})}, \pm \sqrt{\frac{1}{2} (1 \pm i\sqrt{5})}$
14. $\pm 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} (2 \pm i\sqrt{11})$
15. $\frac{1}{2} (-1 \pm i\sqrt{5}), 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} (2 \pm \sqrt{5})$
16. $\pm 1, \frac{1}{2} (2 \pm i\sqrt{5}), \frac{1}{4} (2 \pm i\sqrt{7})$
17. $1, 1, \pm i, \frac{1}{4} (-2 \pm i\sqrt{7})$

பகுதி 2 (g)

1. (i) $2x^2 + 21x^2 + 68x^2 + 181x^2 + 179x + 68 = 0.$

(ii) $2x^2 - 24x^2 + 804x^2 - 1187x^2 + 2327x$
 $- 1884 = 0.$

(iii) $2x^2 + 11x^2 + 34x^2 + 28x^2 + 7x + 1 = 0.$

(iv) $2x^2 - 29x^2 + 168x^2 - 489x^2 + 719x - 427 = 0.$

2. $x^2 - 4x^2 + 8x^2 - 4x + 4 = 0.$

3. $y^2 - 8y^2 + 18y - 15 = 0.$

4. $y^2 + 15y^2 + 24y^2 + 805y^2 + 507y + 258 = 0.$

5. $y^2 + 20y^2 + 158y^2 + 528y + 288 = 0.$

6. $3y^2 - 80y^2 + 475y^2 - 1880y^2 + 2600y - 2745 = 0.$

7. $4y^2 - 40y^2 + 158y^2 - 808y^2 + 808y - 128 = 0.$

8. $y^2 + 2y^2 + y^2 - 4y + 1 = 0.$

9. $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -1, -3$

10. $\frac{2(1 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{-2 + 6\sqrt{5}}}{4},$
 $\frac{2(1 - \sqrt{5}) \pm \sqrt{-2 - 6\sqrt{5}}}{4}$

11. $y^2 - 6y - 15 = 0.$

12. $y^2 - 2y + 1 = 0.$

13. $y^2 - 4y^2 + 1 = 0.$

14. $y^2 - 4y^2 + 1 = 0.$

15. $1, -2 + 3w, -2 + 3w^2$

16. $-4 \pm \sqrt{(18 \pm \sqrt{145})}; -7, -3, -5 \pm \sqrt{3}.$

17. $-2, -6, -7, -1$

18. $3, 3 \pm \sqrt{-8}.$

19. $1, -2 + 3w, -2 + 3w^2.$

20. $2 \pm \sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{2}.$

பயிற்சி 2 (h)

1. $y^3 - 58y^2 + 980y - 5424 = 0$
2. $y^3 - 8py^2 + 8(8p^2 + q)y - 8pq + r = 0.$
4. $y^3 + (2q + p - p^2)y^2 + (q^2 + q + 8r - pq - 2pr)y + r(q + 1 - p - r) = 0.$
5. $y^3 - 8y^2 - 27y + 5 = 0$
6. $y^3 - 5y^2 - 2y - 1 = 0$
7. $\frac{1}{2}, 2, 7$
8. 2, 8, 4, -8
13. $ry^3 - q(1+r)y^2 + p(1+r)^2y - (1+r)^3 = 0$
14. $(p^3 - 4pq + 8r)y^3 + (p^2 - 4pq + 12r)y^2 + (8r - pq)y + r = 0$
15. $y^3 + 6y^2 + 9y + 8 = 0$
16. $y^3 - 18y^2 + 45y - 9 = 0$
17. $9y^3 - 45y^2 + 18y - 1 = 0$
18. (i) $-\frac{(r^3 + 2q^3)}{r^2}$ (ii) $-\frac{q}{2r}$ (iii) $\frac{q^3}{r}$.

பயிற்சி 2 (i)

8. 6.
10. (1) ஒரு குறை எண், இரண்டு உற்பண எண் மூலங்கள்.
(2) ஒரு குறை எண், இரண்டு உற்பண எண் மூலங்கள்.
(3) எல்லா மூலங்களும் மெய்யானவை.
12. $-2 < e < 2.$
13. (1) $-\frac{4}{27} < k < 0$ (2) $4 < k < 5$ (3) $0 < k < 5.$

பாட்பாடு 2 (j)

1. (1) $-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

(2) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 4$

(3) $3, 3, 2i$

(4) $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

(5) $1, 1, 1 - 1 \pm \sqrt{-2}$

(6) $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -2$

(7) $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

(8) $2, 2, 5$

(9) $-2, -2, 3, 3$

(10) $3, 3, -1, -1, -1$

2. $k = 0$.

பாட்பாடு 2 (k)

(3) 3 .

(4) (i) 3

(ii) 3

(5) (i) $3; (-3, -2), (0, 1), (3, 4)$

(ii) $2; (-3, -2), (0, 1)$

(iii) $1; (1, 2)$.

பாட்பாடு 2 (l)

(1) $3, 6, -4$ (2) $6, -7, \frac{1 \pm \sqrt{-18}}{2}$

(3) $2, 2, 3, -5$ (4) $1, -1, 10, 1 \pm \sqrt{-6}$

$$(6) -\frac{1}{2}, 8, 8$$

$$(8) \frac{8}{2}, -1, \frac{-1 \pm 8i}{2}$$

$$(7) \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$$

$$(9) 1, 2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(10) -1, 8, 8, \frac{8}{8}$$

$$(11) 1, 8, -\frac{1}{2}, \pm \sqrt{-2}.$$

பயிற்சி 2 (m)

$$1. 4.8844$$

$$2. 1.8487$$

$$3. 1.8196$$

$$4. 218$$

$$5. 2.59$$

$$6. 2.09455$$

$$7. 8.1788$$

$$8. 0.5818$$

$$9. 8.26$$

$$10. 48.6$$

$$11. (i) 4.26$$

$$(ii) 2.069$$

$$(iii) -2.098,$$

$$12. (i) 2.20$$

$$(ii) 2.39$$

$$(iii) 2.41$$

$$(iv) 2.9587$$

$$(v) 3.0514$$

$$13. (i) -1.52$$

$$(ii) 2.072,$$

$$1.584$$

$$(iii) -2.235.$$

பயிற்சி 2 (n)

1. எல்லாத் தீர்வுகளும் மெய்யெண் தீர்வுகள்.

2. இரண்டு தீர்வுகள் சமம்.

3. இரண்டு தீர்வுகள் உற்பின்; மெய்யெண் தீர்வு குறைமதிப்புடையது.

4. இரண்டு தீர்வுகள் சமம்.

பயிற்சி 2 (o)

$$1. 2, -1 \pm 3i$$

$$2. -1, -1, -4$$

$$3. 2, 4, 5$$

$$4. 1, -1, -2$$

$$5. -4, \frac{1}{2} (8 \pm i \sqrt{8})$$

பயிற்சி 2 (p)

1. $1, -1, -4 \pm \sqrt{5}$
2. $1 \pm \sqrt{-2}, -3 \pm i$
3. $4, -2, 1 \pm i$
4. $1, -3, 2 \pm \sqrt{6}$
5. $4, -1, \frac{-3 \pm i \sqrt{8}}{2}$
6. $-2, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}(-1 \pm i \sqrt{15})$
7. $3 \pm i \sqrt{6}, -3 \pm i$
8. $\pm \sqrt{-2} - 1, 1 \pm \sqrt{2}i$
9. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \pm 1$
10. $1, 2, -2, -3.$

மூன்றாம் பாகம்

1. மெய்யெண் தொகுதி

(System of Real Numbers)

1.1. எண் இனத்தின் இயற்கை எண் (Natural Number), முழு எண் (Integers), கூட்டு எண் என்று பல பிரிவுகள் உள்ளன. கணிதம் வளர்ச்சி அடைவுப்போது எண் இனமும் படிப்படியாக விரிவுபடுத்தப் பட்டுள்ளது. கூட்டு முழு எண் தொகுதியிலிருந்து கூட்டும் பின்னங்கள் உருவாயின. மேலும், குறை முழு எண்கள், குறை பின்னங்கள் முதலியனவையும் உருவடைந்தன. இவ்வாறு கிடைக்கப் பெற்ற தொகுதி மிகிதமுறு . எண்களின் (Rational numbers) தொகுதி எனப்படும்.

எவ்வாறு கூட்டு முழு எண்களும், பூச்சியமும், குறை முழு எண் களும் முழு எண் தொகுதியை (System of Integers) அமைக்கும். இத் தொகுதியில் அமைந்த எண்கள் கணக்கற்றவை. எவ்வ யேனும் இரு முழு எண்களின் மிகிதமாக எழுதக் கூடிய எந்த ஓர் எண்ணும் பகுதி $\neq 0$ எனில் மிகிதமுறு எண் எனப்படும். அதாவது ஒவ்வொரு மிகிதமுறு எண்ணும் p, q என்ற மூன்றில் அமைந்து இருக்கும். இங்கு p, q கூட்டு முழு எண்களாகவோ, குறை முழு எண்களாகவோ இருக்கலாம். p பூச்சியமாக இருக்க ளாம். ஆனால் q பூச்சியமாக இராது.

1, 2, 3 ... என வரும் அடிப்படை எண்கள் இயற்கை எண்கள் அல்லது முழு எண்கள் எனப்படும். இரு கூட்டு முழு எண்களின் கூடுதல் அல்லது பெருக்கல் ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கும். ஆனால் கழித்தல், வகுத்தல் என்ற செயல்கள் வரும்போது கூட்டு முழு எண்கள்தான் அமைப்பெண்டும் என்பது இல்லை. (எ.- கா. 1 2 : 3 = 1 ; $\frac{1}{3}$). எனவே கழித்தல், வகுத்தல் என்ற செயல்கள் அமைவுப்போது குறை முழு எண்கள், பின்னங்கள் உருவாயின.

இவ்வாறு அமைந்த விகிதமுறு எண்களின் தொகுதியின் சம அடிப்படைத் தன்மைகளை இயல்வதிவாவதில் காட்டுவோம்.

1.2. வரிசை அமைப்பு (Order Structure) :

வரிசை :

x, y என்ற இரண்டு விகிதமுறு எண்கள் $x > y$ ஆகலது $x < y$ என்று இருக்குமாயில், கீழ்க்கண்ட வரிசை அமைப்புக் கொள்கைகளைப் பூர்த்தி செய்யும்.

(i) x, y, z என்ற மூன்று விகிதமுறு எண்கள் $x > y, y > z$ என்று அமைவுமானால், $x > z$ ஆகும்.

(ii) x, y ($x < y$) என்ற இரு விகிதமுறு எண்களுக்கு இடையில் z என்ற விகிதமுறு எண் உள்ளது. அதாவது $x < z < y$ என அமைவும.

தேரீப்பு :

$x = \frac{a}{b}; y = \frac{c}{d}$ என்ற எகவியேனும் இரண்டு விகிதமுறு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம் ($b > 0, d > 0$).

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).}$$

எனவே $ad < bc$ ஆகும்.

$$\text{தாம் } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \text{ என நிறுவலாம்.}$$

$$ad < bc \text{ எனில் } ad + ab < bc + ab$$

$$\therefore a(b+d) < b(a+c)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

மேலும் $ad < bc$

$$ad + cd < bc + cd$$

$$\therefore d(a+c) < c(b+d)$$

$$\therefore \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

$$\therefore \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

எனவே $\frac{a+c}{b+d} (-x)$ என்ற விதிதழுது எண் $\frac{c}{b} (-x)$, $\frac{c}{d} (-y)$ என்ற விதிதழுது எண்களுக்கு இடையே உள்ளது. ஆகையால் எவையெனும் இரு விதிதழுது எண்களுக்கிடையே ஒரு விதிதழுது எண் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \text{ என்பன இரு விதிதழுது எண்கள். இங்கு } \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

ஆகும் இவற்றிற்கிடையே $\frac{5}{7}$ என்னும் விதிதழுது எண் உள்ளது.

$$\text{அதாவது } \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4} \text{ ஆகும்.}$$

நாம் மேற்கூறியவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்ட தேற்றத்தை திறவலாம்.

1.3. தேற்றம் 1 :

கொடுத்துள்ள இரு விதிதழுது எண்களுக்கு இடையில் எண்ணற்ற விதிதழுது எண்கள் உள்ளன.

தெரிவு :

x, y எவையெனும் இரு விதிதழுது எண்களாக இருக்கட்டும். ($x < y$). N ஏதேனும் ஒரு மிகப் பெரிய கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கட்டும். $d = y - x$, ($x < x + \frac{d}{2} < y$) எனக் கொண்டால், இங்கு $x + \frac{d}{2}$, $x + \frac{d}{2^2}$, $x + \frac{d}{2^3}$, ..., $x + \frac{d}{2^{N+1}}$ என்ற $(N+1)$ எண்களும் x, y -க்கிடையே அமைந்த விதிதழுது எண்களாகும்.

எனவே N எவ்வளவு மிகப் பெரிய எண்ணாக இருப்பினும், N -க்கு மேற்பட்ட விதிதழுது எண்கள் x, y -க்கிடையே அமைந்துள்ள எண்பதகம் காண்கிறோம். அதாவது x, y -க்கு இடையே உள்ள விதிதழுது எண்கள் கணக்கிலடங்காதவைவரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$ இவற்றிற்கிடையில் $\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 2}, \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 4},$
 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 6}, \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \times 8} \dots$ என்ற வரும் எண்ணற்ற
 வித்திறுது எண்கள் உள்ளன.

குறிப்பு :

(1) M கொடுத்துள்ள மிகப் பெரிய முழு எண்ணாகவும் N கொடுத்துள்ள மிகச் சிறிய முழு எண்ணாகவும் இருந்தால் M, N க்கு இடையே முடிவுள்ள (finite) எண்ணிக்கையில் அமைந்த முழு எண்களே உள்ளன. ஏனெனில் M -ம், N -ம் ஒரே குறியைக் கொண்டிருந்தால் M, N இடையே உள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கையானது $(M-N-1)$ ஆகும். M கூட்டு மதிப்பும் N குறை மதிப்பும் கொண்டிருந்தாலும் இவ்வெண்ணிக்கை $(M-N-1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$N=2, M=48$ என்றால் இங்கு 2-க்கும், 48-க்கும் இடையே உள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கை 46 ஆகும். $N=-17, M=4$ எனில், இவற்றிற்கிடையேயுள்ள முழு எண்களின் எண்ணிக்கை 18 ஆகும்.

(2) N என்னும் ஏதேனும் ஒரு முழு எண் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதை அடுத்து முன்னும் பின்னும் அமைந்துள்ள முழு எண்களை உடனே கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனால் r கொடுக்கப்பட்ட வித்திறுது எண் எனில் அதை அடுத்து முன்னோ அல்லது பின்னோ அமைந்துள்ள வித்திறுது முழு எண்கள் எவை என்று கண்டுபிடிக்க இயலாது. ஏனெனில் r க்கு மிக அருகில் r' என்னும் வித்திறுது எண் கண்டுபிடித்தாலும் மேலே கூறிய தேற்றத்தின்படி, r, r' என்பவற்றின் இடையே எண்ணற்ற வித்திறுது எண்கள் உள்ளன. இதிலிருந்து கீழ்க்கண்ட விளைவை அறிகிறோம்.

r ஒரு வித்திறுது எண்ணாகவும் s ஏதேனும் மிகச்சிறிய கூட்டு வித்திறுது எண்ணாகவும் இருப்பின் r இலிருந்து s க்கு விடக் குறைவான வித்தியாசத்தில் அமைந்த எண்ணற்ற வித்திறுது எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஏனெனில் $r+s$ ஒரு வித்திறுது எண்.

எனவே $r, r+s$ இடையே அமைந்துள்ள வித்திறுது எண்கள் எண்ணற்றவை.

1-4. கூட்டம் :

a, b எணவெண்கள் இரண்டு விகிதமுறு எண்களானால் $a+b$ -ம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல் கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்கு உட்பட்டு அமைந்துள்ளன.

(i) மாற்று விதி (Commutative law) : a, b என்பன இரண்டு விகிதமுறு எண்களானால், $a+b = b+a$.

(ii) சேர்ப்பு விதி (Associative law) : a, b, c எணவெண்கள் மூன்று விகிதமுறு எண்கள் ஆனால் $(a+b) + c = a + (b+c)$

(iii) மாற்றில் உறுப்பு (பூச்சியம்) அமைத்திருத்தம் (Existence of additive identity) : $a + 0 = a$ ஆகும்.

(iv) எதிர்மாறு உறுப்பு அமைத்திருத்தம் : (Existence of additive inverse) : ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் அதன் குறை மதிப்புடன் கூட்டுவதால் பூச்சியம் ஆகும்.

அதாவது ' a ' என்ற விகிதமுறு எண்ணுக்கு அதன் குறை மதிப்பு ' $-a$ ' ஐக் கூட்டினால் நமக்குக்குக் கிடைப்பது பூச்சியம்.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

(v) ஒரீயல்பு விதி (Monotony law) : $a, b, (a < b)$ என்ற விகிதமுறு எண்கள்,

$$a + c < b + c \text{ என்று அமைத்திருக்கும்.}$$

1-5. பெருக்கம் :

a, b எணவெண்கள் இரண்டு விகிதமுறு எண்களானால் a, b -ம் கூட ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும். விகிதமுறு எண்களின் பெருக்கம் கீழ்க்கண்ட விதிகளுக்கு உட்பட்டுள்ளன.

(i) மாற்று விதி :

$$ab = ba.$$

சேர்ப்பு விதி :

a, b, c என்பன மூன்று விகிதமுறு எண்களானால்,

$$(ab) c = a (bc)$$

மாற்றிவி உறுப்பு அமைத்திருத்தல் :

' a ' என்ற விகிதமுறு எண்ணை ' 1 ' ஆக பெருக்கினால் கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு எண் ' a '-யே கிடைக்கும்.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

எதிர்மாறு உறுப்பு அமைத்திருத்தல் :

மிகச்சிறியதாக இல்லாத ஒன்றை ஒரு விகிதமுறு எண் ' a ' க்கும் ஒத்தவாறு a^{-1} என்ற விகிதமுறு எண், $a \cdot a^{-1} = 1$ என அமைத்து இருக்கும்.

பங்கிட்டு விதி (Distributive Law) :

$a(b+c) = ab+ac$. இவ்விதி கூட்டல், பெருக்கல் என்ற இது செயல்களுடன் தொடர்புடையது.

ஒரீயல்பு விதி :

a, b ($a > b$) என்ற இரு விகிதமுறு எண்களை c ($c > 0$) ஆக பெருக்கினால் $ac > bc$ என அமையும்.

1.6. தேற்றம் 2 :

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ கொடுத்துள்ள இரு கூட்டு விகிதமுறு எண்கள் எனில், $n \left(\frac{a}{b} \right) > \frac{c}{d}$ என்ற முறையில் n என்னும் கூட்டு முழு எண் உள்ளது.

குறிப்பு :

a, d என்பன கூட்டு முழு எண்களாதலின்,

$$ad \geq 1$$

$$bc \cdot ad \geq bc$$

$$\therefore ad+bc, ad \geq bc+1 \geq bc$$

$$(1+bc) ad \geq bc$$

$$(1+bc) = n \text{ (கூட்டு முழு எண்)}$$

$$n \cdot ad \geq bc$$

$$\frac{na}{b} \geq \frac{c}{d}$$

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{11}{15} + \frac{5}{8}$ என்பதன் இரு கூட்டு விசிறமுறு எண்கள் ஆனவை

$$5 \cdot \frac{11}{15} = \frac{11}{3} > \frac{5}{8}.$$

1.7. விசிறமுறு எண்களின் பகுப்பு (Sections of Rational Number)

விசிறமுறு எண்களின் தொகுதியைக் கீழ்க்கண்டவாறு L , U என்ற இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கலாம்.

- (i) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஓர் எண்ணுவது அமைத்து இருக்கும்.
- (ii) ஒவ்வொரு எண்ணும் L , U என்பவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் அமைத்து இருக்கும்.
- (iii) L -ல் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணும் U -ல் அமைத்த ஒவ்வொரு எண்ணையும் விட மதிப்பில் குறைவானது.

இவ்வாறு விசிறமுறு எண்களை L , U என்ற இரு வகுப்புகளாகப் பிரிப்பது விசிறமுறு எண்களின் பகுப்பு (Section) எனப்படும். இதை (L , U) எனக் குறிப்பிடுகிறோம். L , U முறையே வெட்டின் கீழ் பகுப்பு, மேல் பகுப்பு எனப்படும்.

மேல் குறித்த பகுப்பு மூன்று கூறுகளாகும். அவைகள் மூன்றையே

- (1) L -ல் மீப்பெரு உறுப்பு அமைய U -ல் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

5-ல் 5 ஐ விடச் சிறியவை L -ஹும், 5 ஐ விடப் பெரியவை U -ஹும் அமைக்கப்பட்ட (L , U) ஒரு பகுப்பாகும். ஏனெனில் இது மேல் குறிப்பிட்ட மூன்று தன்மைகளையும் பெற்றுள்ளது. இங்கு L -க்கு மீப்பெரு உறுப்பு 5 ஆகும். U -ல் மீச்சிறு உறுப்பில்லை.

- (2) U -ல் மீச்சிறு உறுப்பு அமைய L -ல் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

4-ம், 4-க்கு மேலேயும் உள்ளவை U -ஓம், 4 ஐ விடச் சிறவவை L -ஓம் அமைக்கப்பட்ட (L, U) ஒரு பகுப்பாகும். இப்பகுப்பில் மேல் கூறிய மூன்று தன்மைகளைப் பெற்றுள்ளது. இக்கு U -க்கு மீச்சிற உறுப்பு 4 ஆகும். L -க்கு மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை.

(8) L -ல் மீப்பெரு உறுப்பும் இல்லை. U -ல் மீச்சிற உறுப்பும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு :

எதிர் விகிதமுறு எண்கள், பூச்சியம், கூட்டு விகிதமுறு எண்களில் அவற்றின் வர்க்கம் 2-க்கும் குறைவாக இருந்தால் அவ்வாறான எண்களை L -ஓம், கூட்டு விகிதமுறு எண்களின் வர்க்கம் 2-க்கும் அதிகமாகக் கொண்ட கூட்டு விகிதமுறு எண்களை U -ஓம் அமைவுமாறு எடுத்துக் கொள்வோம். இப்பகுப்பில் எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் L, U என்பவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் அமைவாமல் விடுபட்டுப் போகவில்லை எனக் காண்போம். இதற்கு வர்க்கம் 2 எனக் கொண்ட விகிதமுறு எண் இல்லை என நிறுவ வேண்டும்.

$x^2 = 2$ என்ற எடுத்துக் கொண்டால், இச்சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் விகிதமுறு எண் எதுவும் இல்லை. முடியுமானால் $\frac{p}{q}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கம் 2 எனக் கொள்வோம். p, q என்பன பொதுக் காரணி இல்லாத மூல எண்கள். எனவே $\frac{p^2}{q^2} = 2$. அதாவது $p^2 = 2q^2$; வலக்கைப் புறம் ஒர் இரட்டைப் படை எண். எனவே p^2 என்பதும் ஒர் இரட்டைப் படை என்னாலும், ஆகையால் p இரட்டைப் படை எண். எனவே $p = 2m$ என்றும்.

$$\therefore 4m^2 = 2q^2.$$

$$2m^2 = q^2.$$

ஆகையால் q^2 ; எனவே, q -ம் இரட்டைப் படை என்னாலும். எனவே, p, q என்ற இரண்டும் இரட்டைப் படை எண்களாதலால் இவற்றிற்கு '2' என்ற பொதுக் காரணி உள்ளது. இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடு எனது. எனவே, 2 ஐ வர்க்கமாகக் கொண்ட விகிதமுறு எண்கள் எதுவும் இல்லை.

எடுத்து L -ல் மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை, U -ல் மீச்சிற உறுப்பு இல்லை என நிறுவுவோம். முடியுமானால் $k, (0 < k, L$ -ல் மீப்பெரு உறுப்பாக இருக்கட்டும். எனவே, $k^2 < 2$.

$\frac{4+8k}{8+2k}$ என்ற கூட்டு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$2 - \left(\frac{4+8k}{8+2k} \right)^2 = \frac{2-k^2}{(8+2k)^2} > 0 \text{ எனவே, } \left(\frac{4+8k}{8+2k} \right)^2 > 2$$

ஆதலால் $\frac{4+8k}{8+2k}$ L -ல் அமைக்கும்.

$$\text{மேலும், } \frac{4+8k}{8+2k} - k = \frac{2(2-k^2)}{8+2k} > 0 \text{ அதாவது, } \frac{4+8k}{8+2k} > k$$

இப்பொழுது கூட்டு எண் $\frac{4+8k}{8+2k}$ வகுப்பு L -ல் அமைந்துள்ள k ஐ விடப் பெரிய எண். ஆனால் இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பாடாகிறது. எனவே, L -க்கு மீப்பெரு உறுப்பு இல்லை. இதேபோன்று U -க்கு மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை என்று நிறுவலாம்.

மேற்கண்ட எடுத்துக் காட்டால் நாம் விசிதமுறு எண்கள் அல்லாத புதிய வகையான எண்களை வரையறை செய்வ வேண்டும். அவையாகியே விசிதமுறு (Irrationals) எண்கள் என அழைக்கிறோம். அதாவது இரு முழு எண்களின் விசிதமாக எழுத முடியாத எண்கள் விசிதமுறு எண்கள் எனப்படும்.

இவ்வாறு மேற்கூறிய மூன்று வகை பகுப்புக்களைத் தவிர வேறு எந்த நிலையும் இத்தகைய பகுப்பில் அமைவாது எனக் காட்டலாம். அதாவது L -ல் மீப்பெரு உறுப்பும், அதே சமயத்தில் U -ல் மீச்சிறு உறுப்பும் கொண்ட (L, U) என்ற பகுப்பு இருக்க முடியாது என நிறுவலாம். இது தெளிவு. ஏனெனில் L -ன் மீப்பெரு உறுப்பு x எனவும், U -ன் மீச்சிறு உறுப்பு y எனவும் கொண்டால் x, y -க்கு இடையே உள்ள எண்ணற்ற விசிதமுறு எண்கள் L, U என்ற வகுப்புகளில் எதுவும் அமைத்து இரா. இவ்வாறெனில், L, U என்பனவாகில் ஒரு பகுப்பை அமைக்க முடியாது.

ஒவ்வொரு விசிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒத்தவாறு இரு பகுப்புகள் கிடைக்கின்றன. ஆய்வெண் கீழ்வகுப்பின் மீப்பெரு உறுப்பாகவோ அல்லது மேல் வகுப்பின் மீச்சிறு உறுப்பாகவோ இருப்பதைப் பொறுத்து இரு பகுப்புகள் உள்ளன. இவ்வாறு இரு பகுப்புகள் வராதபடி, ஒவ்வொரு விசிதமுறு எண்ணுக்கும் ஒரே பகுப்பு வகுப்படி, மெர்ஸென் கொள்கைகளைச் சற்று மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளலாம். அதாவது கீழ் வகுப்பிற்கு மீப்பெரு உறுப்பு இருத்தல் கூடாது எனக்கொள்ளுவதன் மூலம் மெர்ஸென்

வரையறைபயச் சற்று மாற்றி அமைக்கிறோம். இதன்படி விதி மூன்று எண்களை L , U என்ற வகுப்புகளாகப் பிரிப்பது ஒரு பகுப்பு எனில்,

(1) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஒர் உறுப்பினரும் உண்டு. (2) ஒவ்வொரு எண்ணும் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் அமைந்து இருக்கும். (3) L -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் U -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பை விடக் குறைவானது. (4) L -க்கு மீம்பெரு உறுப்பு கிடையாது எனப் பெறுகிறோம்.

இனி வரும் பகுதியில் விதிமூன்று எண்களின் பகுப்பை இங் வரையறைபயின் அடிப்படையிலேயே குறிப்பிடுவோம்.

குறிப்பு :

இதேபோன்று U -க்கு மீச்சிறு உறுப்பு கிடையாது என்பதை மட்டும் கொண்டும் மெய்வெண் வரையறைபயச் சிறிது மாற்றம் செய்யலாம்.

1-8. பகுப்பின் ஒரு தன்மை

k என்பது ஏதேனும் ஒரு எவ்வளவு மிகச்சிறிய நேர் எண்ணு விலும் L -ல் x என்ற ஒர் உறுப்பும், L -ல் y என்ற ஒர் உறுப்பும் $y - x = k$ என்றபடி அமைந்துள்ளன.

தெரிப்பு :

a, b முறையே L, U -ல் அமைத்திருக்கட்டும். $nk > b - a$ அதாவது $a + nk > b$ என்ற சமனின்மைக்கு ஏற்ப n என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண் இருக்கும்.

$a, (a+k), (a+2k) \dots (a+nk)$ என்ற எண்களை எடுத்துக் கொண்டோமானால், a என்ற எண் L -லும் $a+nk$ என்ற எண் U -லும் இருக்கும். ஆகையால்,

$x = a + rk, y = a + (r+1)k$ என்ற அடுத்தடுத்த இரண்டு எண்கள், x ஆனது L -லும் y ஆனது U -லும் அமையு மாறு இருக்கும். எனவே இங்கு $y - x = k$ ஆகும்.

1-9. மெய்வெண் (வரையறை) (Definition of real number,

விதிமூன்று எண்களின் ஒரு பகுப்பு மெய் எண் எனப்படும்.

மெய் வித்தெழுது எண் : வித்தெழுது எண் (வணாயகன்) : (Real rational number : irrational number)

ஒரு பகுப்பின் மெய் வகுப்பின் மீச்சிறு உறுப்பு இருப்பின் அப் பகுப்பு மெய் வித்தெழுது எண் எனவும், மெய் வகுப்பின் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லாவிடில் அப் பகுப்பு மெய் வித்தெழுது எண் எனவும் கூறப்படும்.

α என்ற வித்தெழுது எண் மெய் வகுப்பு U -ன் மீச்சிறு உறுப்பு எனில், இதை (L, U) என்ற மெய் வித்தெழுது எண்ணின் ஒத்த வித்தெழுது எண் எனக் கூறுகிறோம். α என்ற வித்தெழுது எண் னிற்கு ஒத்த மெய் வித்தெழுது எண்ணை $\bar{\alpha}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

1.10. வித்தெழுது எண்கள், மெய் வித்தெழுது எண்கள்-இவற்றின் ஒன்றுக்கு ஒன்று ஒத்த தன்மை (One to one correspondence between rational and real rational number)

மேற் குறித்த வணாயகனையிடுத்து α என்னும் ஒவ்வொரு வித்தெழுது எண்ணுக்கு ஒத்த (L, U) என்னும் (ஒரே ஒரு மெய் வித்தெழுது எண்தான் அமைந்துள்ளது எனக் காணலாம். இங்கு α ஐ விட மதிப்பில் குறைந்த வித்தெழுது எண்கள் கீழ்வகுப்பு L -ஹும் α ஐ விட மதிப்பில் அதிகமான வித்தெழுது எண்கள் மேல் வகுப்பு U -ஹும் அமைந்துள்ளன, மேலும் (L, U) என்னும் ஒவ்வொரு மெய் வித்தெழுது எண்ணிற்கும் ஒத்து அமைந்துள்ள ஒரே ஒரு வித்தெழுது எண் மெய் வகுப்பு U -ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும். எனவே வித்தெழுது எண்களுக்கும், மெய் வகுப்பின் மீச்சிறு உறுப்பைக் கொண்ட பகுப்புகள் எல்லாவற்றிலும் கொடுக்கப்படும் மெய் வித்தெழுது எண்களுக்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்று ஒத்த தொடர்பு உண்டாகிறது.

1.11. மெய்யெண்களுக்கு இடையேயுள்ள வரிசைத் தொடர்பு (Relation of order between real numbers)

$\alpha_1 = (L_1, U_1)$, $\alpha_2 = (L_2, U_2)$ என்பவை இரண்டு மெய் வித்தெழுது எண்கள்.

(i) L_1 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2 -ல் இருக்கும். ஆனால், L_2 -ன் சில உறுப்புகள் L_1 -ல் இராது. அப்பொழுது L_1 ஐ, L_2 -ன் சரியான பகுதி (Proper part) என்று அழைக்கிறோம்.

(ii) L_1 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2 -ல் இருக்கும். ஆனால் L_2 -ன் சில உறுப்புகள் L_1 -ல் இராது. எனவே L_2 , L_1 -ன் சரியான பகுதியாகும்.

(iii) L_1 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2 -ஓம், L_2 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_1 -ஓம் இருக்குமாயின், L_1, L_2 ஆகிய இரண்டும் முற்றிலும் சமம்.

வரையறை :

$\alpha_1 \equiv (L_1, U_1)$, $\alpha_2 \equiv (L_2, U_2)$ என்ற இரண்டு மெய் பெண்கள் (i) $\alpha_1 < \alpha_2$, (ii) $\alpha_1 > \alpha_2$ (iii) $\alpha_1 = \alpha_2$ என்ற அமைத்திருந்தால் முறையே (i) L_1, L_2 -ன் சரியான பகுதி ஆகும், (ii) L_2, L_1 -ன் சரியான பகுதி ஆகும் (iii) L_1, L_2 இரண்டும் சரி சமமாகும்.

குறிப்பு :

L_2 -ல் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லையாகையால், L_2, L_1 -ன் சரியான பகுதியாக இருக்கும்போது L_1 -ல் இல்லாத கணக்கற்ற எண்கள் L_1 -ல் உள்ளன. எனவே இவ்வெண்கள் U_1 -ன் உறுப்புகள் ஆகும்.

1-12. வரையறை : பூச்சியம் $\bar{0}$, கூட்டு, குறை மெய்யெண்கள்

பூச்சியம், U -ன் மீச்சிறு உறுப்பெனின், (L, U) என்ற விகித முறா எண் அதாவது $\bar{0}$ பூச்சியம் என்ற மெய் எண் எனப்படும்.

பூச்சியத்தை ($\bar{0}$) விடக் குறைவான மெய்யெண் குறை மெய் பெண் எனவும், பூச்சியம் $\bar{0}$ ஐ விட அதிகமான மதிப்புடைய மெய்யெண்கள் கூட்டு மெய்யெண்கள் எனவும் கூறப்படும்.

எனவே (L, U) ஒரு கூட்டு மெய்யெண் எனில் L -ல் குறைந்தது ஒரு கூட்டு மெய் விகிதமுறா எண் இருக்கும். இதேபோன்ற U -ல் குறைந்தது ஒரு குறை மெய் விகிதமுறா எண் இருக்குமாயின் (L, U) என்பது ஒரு குறை மெய்யெண்ணாகும்.

1-13. தேற்றம் 3 :

α, β, γ என்பவை $\alpha < \beta, \beta < \gamma$ என்று அமைந்த மூன்று மெய்யெண்களாகாகில், $\alpha < \gamma$ ஆகும்.

தேர்வு :

$\alpha \equiv (L_1, U_1)$, $\beta \equiv (L_2, U_2)$, $\gamma \equiv (L_3, U_3)$ என இருக்கட்டும்.

$\alpha < \beta$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், L_1 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2 -ல் அமைவர், அதேபோல்,

$\beta < \gamma$ ஆகையால் L_2 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_1 -ல் அமை
யும். எனவே, L_1 -ன் எல்லா உறுப்புகளும் L_2 -ல் அமையும்.

மேலும், L_2 -ல் உள்ள ஏதேனும் ஒர் உறுப்பு L_1 -ல் இல்லை.
ஆகையால் L_1 -ஹும் இல்லை. எனவே, L_1, L_2 -ன் சரிவாசை பகுதி
யாகும். $\therefore \alpha < \gamma$ ஆகும்.

1.14. தேற்றம் 4 :

$\alpha = (L, U)$ என்ற மெய்யெண்ணின், L, U என்ற வகுப்பு
களில் அமைந்த எவைவையேனும் உறுப்புகள் ஒன்றையே a, b எனில்,

$$\bar{a} < \alpha, \quad \bar{b} > \alpha.$$

தெரிப்பு :

$\bar{a} = (L_1, U_1), \bar{b} = (L_2, U_2)$ என்கும், a, b ஒன்றையே
 U_1, U_2 -ல் மீச்சிறு உறுப்புகளாகும். எனவே, L_1 -ன் உறுப்புகள்,
 a என்ற விகிதமுறு எண்ணின் விடக் குறைவானவை. ஆகையால் ' a '
 L_1 -ன் ஒர் உறுப்பாகும். ஆகையால் L_1, L_2 -ன் சரிவாசை பகுதி.
 $\therefore \bar{a} < \alpha$.

b, U -ன் மீச்சிறு உறுப்பு எனில், $\bar{b} = (L_2, U_2)$ என்பதால்
 L, L_2 என்ற இரண்டு வகுப்புகளும் சரி சமமானவை. $\therefore \alpha = \bar{b}$

b ஆனது U -ன் மீச்சிறு உறுப்பாக இல்லாவிடில் L ஆனது
 L_1 -ன் சரிவாசை பகுதி ஆகும்.

$$\therefore \alpha < \bar{b}.$$

1.15. தேற்றம் 5 :

எவைவையேனும் இரண்டு மெய்யெண்களுக்கு இடையே எண்
னற்ற மெய் விகிதமுறு எண்கள் உண்டு.

தெரிப்பு :

$\alpha_1 = (L_1, U_1), \alpha_2 = (L_2, U_2)$ என்பவை இரண்டு வேறு
பட்ட மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும்.

$\alpha_1 < \alpha_2$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் L_1, L_2 -ன் சரிவாசை
பகுதியாகும். எனவே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் L_1 -ல்
அமைந்தும் L_2 -ல் அமைவாமலும் இருக்கும்.

எனவே இம்மெய்கள் U_1 -ல் இருக்கும்.

இவ்வெண்ணெற்ற விகிதமுறு எண்களில் ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் 'a' ஐ எடுத்துக் கொண்டால் (a ஆனது U_1 -ல் மீச்சிறு உறுப்பு இல்லை),

$$a_1 < \bar{a} < a_2 \text{ (தேற்றம் மூலம்)}$$

இவ்வாறு தாம் a_1, a_2 -க்கு இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்களைக் காணலாம்.

1.16. தேற்றம் 6 :

a, b எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்கள்,

$$a < b \text{ ஆனால் } \bar{a} < \bar{b}$$

$$a = b \text{ ஆனால் } \bar{a} = \bar{b}$$

$$a > b \text{ ஆனால் } \bar{a} > \bar{b}$$

தெரிவு :

$$\bar{a} = (L_1 \cup U_1), \bar{b} = (L_2 \cup U_2) \text{ என இருக்கட்டும்.}$$

எனவே a, b என்பவைகள் முறையே U_1, U_2 என்பவைகளின் மீச்சிறு உறுப்புகளாகும்.

$a < b$ ஆனால் a ஐ விடக் குறைவான ஒரு விகிதமுறு எண் b ஐ விடவும் குறைவானதாகும். எனவே L_1 -ல் உள்ள ஓர் வேர் எண்ணும் L_2 -ல் அமைந்திருக்கும். மேலும் a, b-க்கு இடையே அமைந்த எல்லா விகிதமுறு எண்களும் L_1 -ல் இருக்கும். ஆனால் L_1 -ல் இராது. ஆகையால் L_1, L_2 -ன் சரியான பகுதியாகும்.

$$\therefore \bar{a} < \bar{b}.$$

$a > b$ எனில் $b < a$ ஆகும். மேற் கூறியபடி

$$\bar{b} < \bar{a} \text{ ஆகும். } \therefore \bar{a} > \bar{b}.$$

$a = b$ எனில் $\bar{a} = \bar{b}$ என்பது தெளிவு.

1-17. இரு மெய்யெண்களின் கூடுதல் : (Sum of two real numbers)

எதாவதே :

$\alpha_1 = (L_1, U_1)$, $\alpha_2 = (L_2, U_2)$ என்ற மெய்யெண்களின் கூடுதல் $\alpha = (L, U)$ என்ற மெய்யெண் ஆகும். இங்கு L_1 -ன் உறுப்புகளை L_2 -ன் உறுப்புகளோடு கூட்டிப் பெறப்படும் எல்லா விதிதழுது எண்களையும் கொண்ட வகுப்பு L ஆகும்.

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

தெளிப்பு :

$\alpha_1 = (L_1, U_1)$, $\alpha_2 = (L_2, U_2)$ - இவை எவையெனும் இரு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். L_1 -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் L_2 -ன் உறுப்பின் கூட்டி அமைக்கப்பட்ட எண்களை L என்ற ஒரு வகுப்பாகக் கொண்டோம். எனவே L -ல் ஒர் உறுப்பாகிலும் அமைத்து இருக்கும். L எல்லா விதிதழுது எண்களையும் கொண்டது அன்று.

அடுத்து σ , L -ல் ஒர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். எனவே $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ என இருக்கும். σ_1 , L_1 - லும், σ_2 , L_2 - லும் அமைத்த உறுப்புகளாகும். b , σ ஐ விடக் குறைந்த ஏதேனும் ஒரு விதிதழுது எண்ணாக இருக்கட்டும். x ஒரு கூட்டு விதிதழுது எண் எனில் $b = \sigma - x$ என்று எழுதலாம்.

$$b = (\sigma_1 + \sigma_2) - x$$

$$= (\sigma_1 - x) + \sigma_2$$

$\sigma_1 - x < \sigma_1$. σ_1 , L_1 -ல் இருப்பதால் $\sigma_1 - x$ -ம் L_1 -ல் அமைக்கும். மேலும் σ_2 , L_2 -ல் ஒர் உறுப்பாகும். எனவே, b என்பது, $(\sigma_1 - x)$ என்ற L_1 -ன் ஒர் உறுப்பு, σ_2 என்ற L_2 -ல் ஒர் உறுப்பு ஆகியவற்றின் கூடுதலாக அமைந்துள்ளது. ஆகவே b , L -ல் அமைத்திருக்கும்.

L_1 , L_2 -க்கு மீட்பெரு உறுப்புகள் இல்லாததால் L -லும் மீட்பெரு உறுப்பு இல்லை. இந்த நிலையில் L ஒரு பகுப்பின் கீழ்ப் பகுப்பாக அமைக்கும். இப்பொழுது L -ல் அமைவத விதிதழுது எண்களை U என்ற வகுப்பில் கொண்டால் (L, U) என்ற பகுப்பு (L_1, U_1) , (L_2, U_2) என்பவற்றின் கூடுதல் எனப்படும். இதை நாம்,

$(L, U) = (L_1, U_1) + (L_2, U_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ என எழுதுகிறோம்.

1.18. குறை மெய்யெண்

U -ல் மீச்சிறு உறுப்பு இருக்குமெனில், -ஆகத் உறுப்பைத் தவிர, மற்ற U -ல் எல்லா உறுப்புகளின் குறை மதிப்புகளை உடைய மெய் விதிமுறை எண்வகை L_1 -ல் அமைத்து, L_1 என்ற வகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். எனவே L_1 -ல் மீறப்பெகு உறுப்பு இல்லை என்பது தெளிவு.

L_1 ஆனது பகுப்பின் கீழ் வகுப்பு என நிறுவ, L_1 -ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு விதிமுறை எண்வகை விடக் குறைவான விதிமுறை எண்ணும் L_1 -ல் உறுப்பே என்ற நிறுவ வேண்டும்.

α_1' , ஒரு விதிமுறை எண் $< \alpha_1$ ($\in L_1$) என இருக்கட்டும்.

$-(-\alpha_1) = \alpha_1$, அதாவது $(-\alpha_1)$ -ன் குறை மதிப்பு ஆதலால் $-\alpha_1 \in U$. மேலும் $\alpha_1' < \alpha_1$ ஆதலால்,

$$-\alpha_1' > -\alpha_1$$

எனவே, $-\alpha_1'$ -ம் U -ன் ஓர் உறுப்பாகும். எனவே, $-(-\alpha_1') = \alpha_1'$ என்பது L_1 -ன் ஓர் உறுப்பாகும். (L_1, U_1') என்ற பகுப்பில், U_1, L_1 -ஐச் சாராத விதிமுறை எண்வகைக் கொண்டுள்ளது. அப்பகுப்பையே குறை மெய்யெண் என்ற அழைக்கிறோம். இதை $-\alpha = -(L, U)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

U என்ற வகுப்பு, U -ன் மீச்சிறு உறுப்பு இருக்குமெனில், அதன் குறை மதிப்பு, L -ன் உறுப்புகளின் குறை மதிப்பு ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்டுள்ளது என்பது தெளிவு.

உதாரணம் :

$\alpha = (L, U)$ என்ற மெய்யெண்ணின் குறை மதிப்பானது (L_1, U_1) ஆகும். அதாவது L_1 என்ற வகுப்பு U -ன் மீச்சிறு உறுப்பு இருக்குமெனில் அதைத் தவிர மற்ற உறுப்புகளின் குறை மதிப்பைப் பெற்ற உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளது.

1.19. இரண்டு மெய்யெண்களின் வித்தியாசம் (Difference of two real numbers)

α, β என்ற இரண்டு மெய்யெண்களின் வித்தியாசம் $\alpha - \beta$ ஆகும். அதாவது $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ ஆகும்.

1-20. கூட்டலின் அடிப்படை விதிகள் (Fundamental laws of addition)

$\alpha = (L_1, U_1)$, $\beta = (L_2, U_2)$, $\gamma = (L_3, U_3)$ எனக் கொள்வோம்.

1-20.1 மாற்று விதி

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ ஆகும்.}$$

σ_1, σ_2 முறையே L_1, L_2 -ன் உறுப்புகளாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_2 + \sigma_1 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, L_1 -ன் உறுப்புகளோடு L_2 -ன் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதானால் அல்லது L_2 -ன் உறுப்புகளோடு L_1 -ன் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதானால் வரும் இரண்டு வகுப்புகளும் சரிவ சமமாகும்.

1-20.2 சேர்ப்பு விதி

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ முறையே L_1, L_2, L_3 என்பவற்றின் ஏதேனும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$$\sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_3) = (\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3.$$

எனவே இதன் தெளிப்பும் தெளிவாகும்.

1-20.3 மாற்றில் உறுப்பு அமைந்திருத்தல் (Existence of additive identity)

$$\alpha + \overline{0} = \alpha.$$

தெளிப்பு:

$\overline{0} = (L', U')$, $\alpha = (L_1, U_1)$, $\alpha + \overline{0} = (L, U)$ என இருக்கட்டும். எனவே, முக்கியம் U' -ன் மீச்சிற உறுப்பாக இருப்பதால் L' -ல் உள்ள உறுப்புகள் எல்லாம் குறைந்ததேயுள்ளனவ. L என்ற வகுப்பு L' -ன் உறுப்புகளையும், L_1 -ன் உறுப்புகளையும் கூட்டுவதாகக் கிடைப்பதாகும். σ_1 என்ற L_1 -ன் உறுப்பை U' -ல் ஏதேனும் ஓர் உறுப்போடு கூட்டுவதால் வரும் எண்ணுள்ளது σ_1 ஐ விடக் குறைவானது. எனவே, அங்மேனான L_1 -ல் அமைவு. எனவே L -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் L_1 -ல் உள்ளது.

அடுத்து a_1', L_1 -ன் ஒத்தேனும் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். L_1 -க்கு மீள்பெறு உறுப்பும் இங்கே. ஆதலால் $a_1 + k$ ($k > 0$) என்ற உறுப்பு L_1 -ன் இருக்கும், $(a_1 + k)$ என்ற உறுப்பை L_1 -றும், $-k$ என்ற உறுப்பை L' -றும் எடுத்து, இவற்றைக் கூட்டிக் கிடைக்கும் $(a_1 + k) - k = a_1$ என்ற உறுப்பு L -ல் அடங்கியும், மேலும் a_1, L_1 -ன் ஓர் உறுப்பு. எனவே L -ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும், L_1 -ல் உள்ளது. எனவே L, L_1 வகுப்புகள் இரண்டும் சரிவ சமமாகும்.

$$\therefore (L_1, U_1) = (L, U).$$

அதாவது $\alpha = \alpha + \bar{0}$ ஆகும்.

1-20.4 எதிர்மறை உறுப்பு அமைத்திருத்தம் (Existence of additive inverse)

$$\alpha = (L_1, U_1), -\alpha = (L, U) \text{ எனில்}$$

$$\alpha + (-\alpha) = \bar{0} \text{ ஆகும்.}$$

தெரிப்பு :

$\alpha + (-\alpha) = (L', U')$ என இருக்கட்டும். $\alpha = (L_1, U_1)$, $-\alpha = (L, U)$. ஆகையால் L' என்ற வகுப்பு L_1 -ன் உறுப்புகளோடு L -ல் உறுப்புகளைக் கூட்டுவதனால் கிடைக்கும் எண்களைக் கொண்ட வகுப்பாகும். தாம் $\bar{0} = (L', U')$ என நினைவு வேண்டும். அதாவது L' -ல் உள்ள உறுப்புகள் குறை மதிப்புடையவை என்று திருத்திப்போம்.

$-\alpha = (L, U)$ ஆகையால் L -ன் உறுப்புகள், U_1 -ன் மீச்சிற உறுப்பைத் தவிர மற்ற உறுப்புகளின் குறை மதிப்பைக் கொண்டது.

எனவே a_1, b_1 முறையே L_1, U_1 என்பவைகளின் எவை வேண்டும் உறுப்புகளெனக் கொண்டால், $-b_1$ என்ற எண் L -ல் அடங்கியும், எனவே a_1 றையும் $(-b_1)$ றையும் கூட்டிக் கிடைக்கும் அடங்கியும், அதாவது $a_1 + (-b_1) = a_1 - b_1$ என்ற எண் L' -ல் அடங்கியும், $a_1 < b_1$ என்பது தெளிவு. எனவே $a_1 - b_1$ என்பது குறை மதிப்புடையது. எனவே L' -ல் உள்ள உறுப்புகள் குறை மதிப்புடையவை. (1)

k ஒத்தேனும் ஒரு குறை மதித்தமுது எண்ணாகவும், $b_1 - a_1 = k$ என்று அமைப்பதாறு a_1, b_1 முறையே L_1, U_1 -ன் உறுப்புகளாக அடங்கியும்.

$$b_1 - a_1 = -k$$

$$\therefore a_1 + (-b_1) = k.$$

$$a_1 + (-b_1) \in L' \quad \therefore k \in L'$$

எனவே, எல்லாக்குறை மிகிதமுள்ள எண்களும் L' -ல் அடங்கும். எனவே, மேற்கூறியவற்றிலிருந்து முச்சிவம் L' -ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும் எனப் பெறுகிறோம்.

$$\therefore \bar{0} = (L', U')$$

$$\text{அதாவது, } \bar{0} = \alpha + (-\alpha) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு :

இத்தன்மையை α -ன் கூட்டலுக்கான எதிர்மறு உறுப்பு $-\alpha$ என்பதன் மூலம் குறிக்கிறோம்.

1-20.5 கூடுதலின் ஒரீயம்பான விதி (Law of Monotony of addition)

$$\alpha > \beta \text{ எனில் } \alpha + \gamma > \beta + \gamma \text{ ஆகும்.}$$

தெரிப்பு :

$\alpha = (L_1, U_1)$ $\beta = (L_2, U_2)$, $\gamma = (L_3, U_3)$
 $\alpha + \gamma = (L', U')$, $\beta + \gamma = (L'', U'')$ என இருக்கட்டும்.
 $\alpha > \beta$ ஆகையால் L_2 ஆனது L' -ன் சரியான பகுதியாகும்.

எனவே, L'' -ம் L' -ன் சரியான பகுதியாகும். L_3 -ல் இவ்வாறான σ_1 என்ற உறுப்பை L_1 -ல் எடுத்துக்கொண்டால், σ_1, U_1 -ல் இருக்கும். $\sigma_1' > \sigma_1$ என்ற உறுப்பை L_1 -ல் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\sigma_1' - \sigma_1 = e$ (e ஒரு கூட்டு மிகிதமுள்ள எண்), σ_2, b_2 முறையே L_2 -ஹும் U_2 -ஹும், $b_2 - \sigma_2 = e$ என்ற இருக்குமான எடுத்துக் கொள்வோம். (§ 1.5)

$$\sigma_1' + \sigma_2 = \sigma_1 + e + b_2 - e$$

$$= \sigma_1 + b_2.$$

இங்கு $\sigma_1' + \sigma_2$ என்பது σ_1' என்ற L_1 -ன் ஒர் உறுப்பையும் σ_2 என்ற L_2 -ன் ஒர் உறுப்பையும் கூட்டிக் கிடைத்த ஒர் எண்ணுள்ள L' -ன் ஒர் உறுப்பாகும்.

மேலும் $a_1 + b_2$ என்பது U_2 -ன் உறுப்போடு U_3 -ன் உறுப்பைக் கூட்டிக் கிடைத்த U' -ன் உறுப்பாகும். எனவே L' -ஓம் U' -ஓம் பொது உறுப்புகள் உள்ளன; ஆனால் L' -ல் இல்லை, ஆகையால் L' , L' -க் சரியான பகுதியாகும். எனவே $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ ஆகும்.

1.21. தேற்றம் 7 :

a, b எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களானால், $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$ ஆகும். அதாவது இரு மெய் விகிதமுறு எண்களின் கூடுதல் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணாகும்.

தெரிப்பு :

$\overline{a} = (L_1, U_1)$, $\overline{b} = (L_2, U_2)$, $\overline{a + b} = (L, U)$ எனக் கொள்வோம். எனவே a, b , மூன்றையே U_1, U_2 -ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும், இப்போது நாம் $(a+b)$, U -ன் மீச்சிறு உறுப்பென நிறுவுவோம்.

x, y மூன்றையே L_1, L_2 -ன் எவையேனும் உறுப்புகளானால், $x+y, L$ -ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

$$x < a, y < b$$

$$\therefore x + y < a + b.$$

$\therefore L$ -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $a+b$ ஐ விடச் சிறியது.

அடுத்து $a+b-k$ ($k > 0$) என்ற விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் $a+b-k < a+b$ ஆகும். ஆனால்

$$a+b-k = \left(a - \frac{1}{2}k \right) + \left(b - \frac{1}{2}k \right)$$

$$= L_1\text{-ன் ஓர் உறுப்பு} + L_2\text{-ன் ஓர் உறுப்பு}$$

$\therefore (a+b-k), L$ -ன் ஓர் உறுப்பு. அதாவது $(a+b)$ ஐ விடச் குறைவான ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் L -ல் அமைந்துள்ளது.

$\therefore (a+b)$ ஆனது U -ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும்.

$$\therefore \overline{a+b} = (L, U) = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\text{அதாவது } \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$$

குறிப்பு :

ஒரு மெய் விகிதமுறு எண், ஒரு விகிதமுறு எண், ஆகிய வற்றின் கூடுதல் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

1-22. தேற்றம் 8 :

ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணின் குறை வதிட்டம் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணாகும். மேலும் $-(\bar{a}) = (-\bar{a})$.

தெரிப்பு :

$$a + (-a) = 0$$

$$\therefore \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

$$\therefore -(\bar{a}) = (-\bar{a})$$

குறிப்பு :

இரு மெய் விகிதமுறு எண்களின் வித்தியாசம் ஒரு மெய் விகிதமுறு எண்ணாகும். $\bar{a} - \bar{b} = \overline{a-b}$.

1-23. தேற்றம் 9 :

இரு மெய்யெண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

தெரிப்பு :

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ எவையேனும் இரு மெய் எண்ணாக இருக்கட்டும். γ ஏதேனும் ஒரு விகிதமுறு எண் எனக் கொள்வோம்.

$$\alpha < \beta \text{ ஆதலால்}$$

$$\alpha + (-\gamma) < \beta + (-\gamma)$$

$$\therefore \alpha - \gamma < \beta - \gamma.$$

இப்பொழுது, $\alpha - \gamma, \beta - \gamma$ என்பவற்றிற்கு இடையே $\bar{\alpha} - \gamma$ போன்ற எண்ணற்ற மெய் விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

$$\therefore \alpha - \gamma < \bar{\alpha} < \beta - \gamma$$

$$[\alpha + (-\gamma)] + \gamma < \bar{\alpha} + \gamma < [\beta + (-\gamma)] + \gamma$$

$$\alpha + [(-\gamma) + \gamma] < \bar{\alpha} + \gamma < \beta + [(-\gamma) + (\gamma)]$$

$$\alpha + \bar{\gamma} < \bar{\alpha} + \gamma < \beta + \bar{\gamma}$$

$$\therefore \alpha < \bar{\alpha} + \gamma < \beta.$$

$\therefore \bar{\alpha} + \gamma$ என்ற விதிதழுது எண் α, β என்பவற்றிடையே உள்ளது.

$\therefore \alpha, \beta$ என்பவற்றின் இடையே எண்ணற்ற விதிதழுது எண்கள் உள்ளன.

1-24. கூட்டுப் பகுப்பின் தன்மை (A property of positive exponents)

வரையறை :

ஏதேனும் ஒரு விதிதழுது எண் $k > 1$ -க்கு ஒத்த (L, U) என்ற கூட்டு மெய்யெண் பகுப்பை, x, y என்ற கூட்டு எண்கள் மூன்றையே L, U -ல் $\left(\frac{y}{x} = k\right.$ என்ற விதிதத்தில்) அமைத்து இருக்கும்.

1-25. இரு மெய்யெண்களின் பெருக்கல்

வரையறை :

$\alpha_1 = (L_1, U_1), \alpha_2 = (L_2, U_2)$ என்ற இரு மெய்யெண்களைப் பெருக்குவதனால் கிடைக்கும் மெய்யெண் $\alpha = (L, U)$ ஆகும். இங்கு L என்ற வகுப்பு (i) எல்லாக் குறை விதிதழுது எண்கள் (ii) விதிதழுது எண் பூச்சியம் (iii) L_1 -ல் ஓர் உறுப்பை L_2 -ல் உள்ள ஓர் உறுப்போடு பெருக்குவதால் கிடைக்கும் கூட்டு விதித மூன்று எண்கள், ஆகியவற்றை உறுப்புகளாகக் கொண்டு அமைவப் பட்டதாகும்.

இதையே தாம் $(L, U) = (L_1, U_1), (L_2, U_2) = \alpha_1, \alpha_2$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

தேசீப்பு :

$\alpha_1 = (L_1, U_1), \alpha_2 = (L_2, U_2)$ என்பவை இரு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். α_1, α_2 என்ற இரண்டுமே கூட்டு மதிப்புடையனவாக இருப்பின் L_1, L_2 ஆகிய இரண்டு வகுப்பிலும் கூட்டு விதிதழுது எண்கள் உள்ளன.

$\alpha = (L, U)$ என்ற பகுப்பை அமைப்போமானாலும் L என்ற வகுப்பில் (i) எக்ஸைக் குறை விசிதமுறு எண்கள் (ii) விசிதமுறு எண் பூச்சியம் (iii) L_1 -ன் ஓர் உறுப்போடு L_1 -ன் ஓர் உறுப்பைப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் கூட்டு விசிதமுறு எண்கள் உறுப்பு களாக அமைத்து உள்ளன.

L ஓர் பகுப்பின் கீழ் வகுப்பு என இப்பொழுது நினைவோம். L -ல் உறுப்புகள் உள்ளன. L -ல் எக்ஸா விசிதமுறு எண்களும் இல்லை. அடுத்ததாக L -க்கு மீள்பெரு உறுப்பு இல்லை என்று நினை வேண்டும்.

a, L -ன் ஒரு கூட்டு விசிதமுறு எண்ணாக இருக்கட்டும். மேலும் $a = a_1 a_2, a_1 \in L_1, a_2 \in L_2$ என இருக்கட்டும்.

$b < a$ என்ற கூட்டு விசிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் $\frac{b}{a} = x$ என இருக்கட்டும். எனவே $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned} \therefore b &= ax = (a_1 a_2) x \\ &= a_1 (a_2 x) \end{aligned}$$

a_2 ஐ விடச் சிறிய $a_2 x \in L_2$

ஆகையால் b என்ற கூட்டு விசிதமுறு எண், L_1 -ன் ஓர் உறுப்பு a_1 ஐயும், L_2 -ல் ஓர் உறுப்பை $a_2 x$ ஐயும் பெருக்கிக் கிடைத்த எண். எனவே b, L -ல் உள்ளது.

மேலும் L_1, L_2 எல்பவைகளுக்கு மீள்பெரு உறுப்பு இல்லாத தால் L -க்கும் மீள்பெரு உறுப்பு இல்லை. எனவே $L, (L, U)$ என்ற பகுப்பின் கீழ் வகுப்பாக அமைப்ப ஓடியும் (L, U) என்ற இப்பகுப்பு $(L_1, U_1), (L_2, U_2)$ ஆகியவற்றின் பெருக்கத் தலை எனப்படும்.

இதை $(L, U) = (L_1, L_1), (L_2, U_2)$ α_1, α_2 எனக் குறிப் பிடுகிறோம்.

தலைக்குக் கூட்டு மெய்யெண் (The reciprocal of a positive real number)

மையமைத :

$\alpha^{-1} = (L, U)$ என்றால், L -ல் (i) எக்ஸைக் குறை விசிதமுறு எண்களும் (ii) விசிதமுறு எண் பூச்சியம் (iii) $\alpha \neq (L_1, U_1)$

என்ற பகுப்பில் U_1 -ன் மீச்சிற உறுப்பைத் தவிர மற்ற என்ன உறுப்புகளின் தலைகீழ் மதிப்புகளைக் கொண்ட எண்களும் உறுப்புகளாக அமைவும். எனவே α^{-1} ஐ α -ன் தலைகீழ் மதிப்பு என்கிறோம்.

1.28. இரு மெம்பெண்டுகளின் வகுத்தம்

α, β ($\beta \neq 0$) என்பன இரு மெம்பெண்டுகளாகில்

$$\frac{\alpha}{\beta} = (\alpha) \left(\frac{1}{\beta} \right) = \alpha \beta^{-1} \text{ ஆகும்.}$$

பெருக்கலின் அடிப்படை விதிகள்

(i) மாற்று விதி: α, β இரு விசிதமுறு எண்களெனில் $\alpha\beta = \beta\alpha$ ஆகும்.

(ii) சேர்ப்பு விதி: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ஆகும்.

(iii) மாற்றில் உறுப்பு அமைந்து இருத்தம் (Existence of Multiplication identity):

$$\alpha = (L_1, U_1), 1 = (L_1, U_1) \text{ என்கும்}$$

$$\alpha \bar{1} = \alpha = (L, U) \text{ ஆகும்.}$$

தேர்ப்பு:

$\bar{1} = (L_1, U_1)$ ஆனும் L_1 -ல் உள்ள உறுப்புகள் < 1 ஆகும். மேலும் U_1 -ன் மீச்சிற உறுப்பு 1 ஆகும். L என்ற வகுப்பு L_1 -ன் ஓர் உறுப்பையும், L_1 -ல் ஓர் உறுப்பைப் பெருக்குவதால் கிடைக்கும் எண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட வகுப்பாகும். எனவே

$$a_1 \in L, a_2 \in L_1 \text{ எனில்}$$

$$a_1 a_2 \in L \text{ ஆகும். } a_1 a_2 < a_1, 1 = a_1.$$

(ஏனெனில் $a_2 \in L_1$ மேலும் $a_2 < 1$),

$\therefore a_1 a_2$ என்ற L_1 ன் உறுப்பு, a_1 என்ற L_1 -ன் உறுப்பை விடக் குறைவானது. எனவே L -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் L_1 -ல் அமைவும்.

அடுத்ததாக $a_1 \in L_1, a_2 > a_1$ எனும்படியான $a_2 \in L_1$ ஆக இருக்கட்டும்.

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1 \text{ ஆதலால் } \sigma_1 \in L_2.$$

$$\text{இப்போது } \sigma_1 \sim \sigma_2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)$$

எனவே $\sigma_1 \in L_1$ -ன் ஓர் உறுப்போடு L_2 -ன் ஓர் உறுப்பின் பெருக்கற் பலனுக் அமைகிறது.

எனவே $\sigma_1 \in L$ -ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

ஆகவே L_1 -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் L -ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

எனவே L, L_1 என்ற இரண்டு வகுப்புகளுள் சரிவசமம்.

$$\therefore (L, U) = (L_1, U_1)(L_2, U_2)$$

$$\alpha = \alpha \cdot \bar{1} (\alpha > 0)$$

$$\alpha < 0 \text{ எனில் } (-\alpha) \bar{1} = (-\alpha)$$

$$\text{ஏனெனில் } \alpha \cdot \bar{1} = -[(-\alpha) \cdot \bar{1}]$$

$$= -(-\alpha) = \alpha.$$

(iv) பெருக்கறுக்கான எதிர்மாறு உறுப்பு:

$$\alpha \neq 0 \text{ எனில் } \alpha \cdot \alpha^{-1} = \bar{1} \text{ ஆகும்.}$$

(v) ஒரீயங்கு விதி (Monotony Law):

$$\alpha < \beta, \gamma \text{ கூட்டு மதிப்பைப் பெற்றது}$$

$$\text{எனில் } \alpha\gamma < \beta\gamma.$$

(vi) இரு மெப் விதிதரும் எண்களின் பெருக்கற் பலனும் ஒரு மெப் விதிதரும் எண் ஆகும். மேலும் $a \cdot b = ab$ ஆகும்.

(vii) பங்கிடு விதி (Distributive Law):

$$\alpha = (L_1, U_1), \beta = (L_2, U_2), \gamma = (L_3, U_3)$$

$$\alpha(\beta + \gamma) = (L, U), \alpha\beta + \alpha\gamma = (L', U')$$

$$\text{எனில் } \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ ஆகும்.}$$

தெரியு :

α, β, γ கூட்டு மெய்யெண்களாக இருக்கட்டும். குறைவிலிதழறு எண்கள், பிச்சியம், ஆகியவைகள் L -ஹும், L' -ஹும் அமையும்.

$\sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2)$ என்பது L -ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

$\sigma_1 \sigma_1 + \sigma_1' \sigma_2$ என்பது L' -ன் ஓர் உறுப்பாகும்.

$(\sigma_1, \sigma_1' \in L_1)$

மேலும் $\sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_1 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2$ ஆகும்.

$\sigma_1 = \sigma_1'$ ஆனும்,

$$\sigma_1 \sigma_1 + \sigma_1' \sigma_2 \in L'$$

எதாவது $\sigma_1 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 \in L'$

$$\therefore \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2) \in L'$$

எனவே $\sigma_1' = \sigma_1$, ஆனும் L' -ன் உறுப்புகள் L -ல் உள்ளன.

எனவே பொதுப்படையாக $\sigma_1 > \sigma_1'$ ஆனும் $\sigma_1' / \sigma_1 < 1$.

$$\sigma_1' \sigma_2 = \sigma_1 [(\sigma_1' \sigma_1) \sigma_2] = \sigma_1 \sigma_1' \sigma_2 \text{ ஆக இருக்கட்டும்.}$$

$$\sigma_2' = \left(\frac{\sigma_1'}{\sigma_1} \sigma_2 \right) < 1, \sigma_2 = \sigma_2$$

$$\therefore \sigma_2' \in L_2,$$

$$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1' \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2' = \sigma_1 (\sigma_2 + \sigma_2')$$

$$\therefore \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1' \sigma_2' \in L^2$$

$$\text{மேலும், } \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2' = \sigma_1 (\sigma_2 + \sigma_2') \in L$$

$$\therefore L, L' \text{ ஆகிய இரு வகுப்புகளும் சர்வ சமம்.}$$

$$\therefore \alpha (\beta + \gamma) = \alpha \beta + \alpha \gamma \text{ ஆகும்.}$$

1-27. பெரு கிளியன் தேற்றம் 10 : (Dedekind's Theorem)

எவ்வாறு மெய்யெண்களையும் (L, U) என்ற இரு வகுப்புகளாகக் கிழக்கண்ட ஓரணறமிக் பிரிக்கலாம்.

(i) ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் ஓர் உறுப்பேனும் உண்டு.

(ii) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஏதேனும் ஒரு வகுப்பில் இருக்கும்.

(iii) கீழ் வகுப்பு L -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மேல் வகுப்பு U -ன் ஒவ்வொரு உறுப்பை விடக் குறைவானது.

இவ்வாறெனின் L -ல் மீர்பெரு உறுப்பு உண்டு அகவது U ல் மீச்சிற உறுப்பு உண்டு.

தேசீப்பு:

இப்பொழுது L , U எல்பவற்றின் மெய்விதிதழறு உறுப்பு களுக்கு ஏற்ப அமைத்த விதிதழறு எண்களை மட்டும் கொண்டு L_1 , U_1 என்ற இரு வகுப்புகளை அமைக்கலாம்.

நிலை 1: L_1 -க்கு 'a' என்றும் மீர்பெரு உறுப்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே a-க்கு ஒத்த மெய் விதிதழறு எண் \bar{a} L -ல் அமைக்கும். இப்பொழுது \bar{a} , L -ன் மீர்பெரு உறுப்பு என நினைவுகொள்வோம். இவ்வாறு இல்லையெனில் $\bar{a} > a$ என்றும்படி \bar{a} , L -ன் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும். இப்பொழுது \bar{a} , \bar{a} இவற்றைக் கிடைவே எண்ணற்ற மெய் விதிதழறு எண்கள் உள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று b என இருக்கட்டும். அதாவது,

$$\bar{a} < b < \bar{a}.$$

இப்பொழுது \bar{a} , L -ன் ஓர் உறுப்பு. மேலும் $\bar{b} < \bar{a}$.

ஆதலால் $b \in L$ $\bar{b} \in L_1$. மேலும் $\bar{a} < \bar{b}$ ஆதலால் $a < b$ அதாவது L_1 -ன் மீர்பெரு உறுப்பான a ன்னை விட அதிக மதிப்புடைய b , L_1 -ல் அமைத்துள்ளது. இது முரண்பாட்டான முடிவாகும். எனவே \bar{a} L -ன் மீர்பெரு உறுப்பாகும்.

நிலை 2: U_1 -க்கு x என்ற மீச்சிற உறுப்பு இருப்பதாகக் கொள்வோம். மேற்கூறியவாறு x , U_1 -ன் மீச்சிற உறுப்பு என நினைவுகொள்வோம்.

நிலை 3: L_1 -க்கு மீர்பெரு உறுப்பும், U_1 -க்கு மீச்சிற உறுப்பும் இல்லாமல் இருக்கட்டும். இந்த நிலைகளில் (L_1 , U_1) என்ற பகுப்பு 'd' என்றும் விதிதழறு எண்ணாகும்.

1. U - இவற்றைக் ஏதேனும் ஒன்றில் d அமைத்து இருக்கும்.

(i) d, L -ல் அமைத்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது d, L -ன் மீர்பெரு உறுப்பென நினைவுகொள்வோம். இவ்வாறு இல்லையெனில் $\bar{d} > d$ L -ன் ஓர் உறுப்பாக இருக்கட்டும்.

$\alpha < \beta < \beta$ என்றும்படி α என்னும் ஏதேனும் மெய் விகித ஒரு எண் அமைத்திருக்கும். $\beta \in L$ ஆதலால் $\alpha < \beta$ க்கு ஒத்த α , L -ல் அமைத்து இருக்கும்.

$\alpha = (L_1, U_1)$ என்ற மெய்யெண்ணின் கீழ் வகுப்பான L -ல் $\alpha > \alpha$ என்றும்படி α என்னும் உறுப்பு அமைத்துள்ளது. இது பொருத்தது (§) எனவே α , L -ன் மீப்பெரு உறுப்பு.

(ii) இதேபோன்று $\alpha \in U$ எனில் α , U -ன் மீச்சிறு உறுப்பு என நிறுவலாம்.

குறிப்பு :

(i) மேற்கூறிய தேற்றத்திற்குத் து மேற் குறித்தவாறு மெய்யெண்களை L, U என்ற இரு வகுப்புகளாகப் பிரிக்கும்போது α என்றும் மெய்யெண் α ஐ விடக் குறைந்த ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் L -லும், α ஐ விட அதிகமான ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் U -லும் அமைத்தும்படி உள்ளது. α , L -லோ அல்லது U -லோ அமைத்து இருக்கும்.

(2) இத்தேற்றத்திற்குத் து விகிதமுற எண்களின் பகுப்பிற்கும் மெய்யெண்களின் பகுப்பிற்கும் இடையே உள்ள ஓர் அடிப்படையே வேறுபாடு புலனாகிறது. ஏனெனில் (L, U) விகிதமுற எண்களின் பகுப்பு எனில் L -க்கு மீப்பெரு உறுப்போ, U -ல் மீச்சிறு உறுப்போ இல்லாமல் அமையலாம். ஆனால் (L, U) ஒரு மெய்யெண்களின் பகுப்பு எனில் இவ்வாறு அமைய முடியாது. அதாவது L, U என்ற விகிதமுற எண்களின் வகுப்புகளுக்கு இடையே இடைவெளி உள்ளது. ஆனால் மெய்யெண்களின் L, U என்ற வகுப்புகளுக்கு இடையே இடைவெளி இல்லை. அதாவது விகிதமுற எண் தொகுதி பெற்றிராத ஒரு முழுமைத் தன்மையை (Property of Completeness) மெய்யெண் தொகுதி பெற்றுள்ளது.

1-28. விகிதமுற எண்களை ஒரு தேர் கோட்டின் மீது அமைத்த புள்ளிகளாகக் குறிப்பிடுதல்

P என்னும் புள்ளியின் தேர் கோட்டில், O என்னும் புள்ளியை ஆதியாகவும், OP என்ற தூரத்தை ஓர் அளவு தூரமாகவும் கொண்டாக, ஒவ்வொரு விகிதமுற எண்ணையும் P என்னும் தேர் கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளியொன்றின் மூலம் குறிக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக α என்பது ஒரு கூட்டு விகிதமுற எண்ணாக



O -விருத்து வரம்பு x . OP என்ற அளவு தூரத்திலுள்ள புள்ளி x என்னும் கூட்டு விதிமுறை எண்ணாக் குறிக்கும். O என்பது பூச்சியத்தையும் P என்பது ஒன்றையும் குறிக்கும் புள்ளிகளாகும். கூட்டு விதிமுறை எண்களை O -விருத்து நேர் கோட்டில் வரம்பு புறமாகவும், குறை விதிமுறை எண்களை O விருது இடப் புறமாகவும் குறிப்பிடுகிறோம். இவ்வாறு விதிமுறை எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளை விதிமுறை புள்ளிகள் என்று கூறுகிறோம்.

B, C - இவை இரண்டும் எவையேனும் இரண்டு விதிமுறை புள்ளிகளாக இருக்கட்டும். $OB = \alpha$, $OC = \beta$ என இருக்கட்டும். எனவே $BC = \beta - \alpha$. BC -ன் நடுப்புள்ளி K_1 எனும் K_1 ஐக் குறிக்கும் விதிமுறை எண் $\alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$. இதேபோன்ற BK_1 -ன் நடுப்புள்ளியான K_2 ஐக் குறிக்கும் விதிமுறை எண் $\alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{2^2}\right)$. இதே போன்ற $\alpha + \left(\frac{\beta - \alpha}{2^n}\right)$, என்ற எண்ணற்ற விதிமுறை எண்களைக் குறிக்கும் விதிமுறை புள்ளிகளை BC -க்கு இடையே காணலாம்.

மேற்கண்ட முடிவினிருந்து ஒரு நேர் கோடு விதிமுறை புள்ளிகளாவேயே முற்றும் பெறுகின்றது என முடிவு செய்ய இயலாது. ஏனெனில் விதிமுறை புள்ளிகள் எத்தனை நெருக்கமான அளவுக்குப்படுகின்றும், அவற்றிற்கும் விவரண எண்ணற்ற புள்ளிகளும் நேர் கோட்டின் மீது அமைக்கும். எடுத்துக்காட்டாக நாம் வரைந்துள்ள 'P' என்ற நேர்கோட்டில் $OA' = 2$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் A' என்னும் புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தப் புள்ளி A' , ஒரு விதிமுறை புள்ளியாக இருக்க முடியாது. ஏனெனில் $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் விதிமுறை எண் எதுவுமில்லை.

எனவே விதிமுறை புள்ளிகள் மட்டும் ஒரு நேர் கோடு மீது பொருத்ததிலும் அந்த நேர் கோட்டில் எண்ணற்ற இடைவெளிகள் இருப்பதனாலும், ஒரு நேர் கோட்டைப் பூர்த்தி செய்ய விதிமுறை எண்கள் மட்டும் போதாது.

ஒரு நேர் கோட்டில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O -க்கு, வரம்பு புறமாக அமைந்துள்ள புள்ளிகள் வகுப்பு B -லும், இடப் புறமாக அமைந்துள்ள புள்ளிகள் வகுப்பு A -லும் அமைந்தால் O என்ற புள்ளி நேர் கோட்டின்மீது உள்ள புள்ளிகளை இரண்டு

வகுப்புகளாகப் பிரிக்கிறது. இத்தப் புள்ளி U ஐயே நாம் ஒரு மெய் பெண் (L, U) என்று குறிப்பிடுகிறோம். எனவே ஒவ்வொரு மெய் பெண்ணுக்கும் ஒத்த ஒரு புள்ளி ஒரு தேர்வோட்டில் அமைபும்,

மறுதலையாக ஒரு தேர்வோட்டில் அமைந்த ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஒத்த ஒரு மெய்யெண் உண்டு. இவ்வாறு ஒரு தேர்வோட்டின் மீதமைந்த புள்ளியுக்கும், மெய்யெண்களுக்கும் இடையே ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு அமைந்துள்ளது. எல்லா மெய்யெண்களையும் கொண்ட தொகுதி எண்ணியல் தொடராகம் (Arithmetic continuum) எனவும், ஒரு தேர்வோட்டில் மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் கொண்ட தொகுதி கோட்டுத் தொடராகம் (Linear continuum) எனவும் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\alpha > \beta$ எனில் $(\alpha - \beta)$ கூட்டு மதிப்புடையது.

$\alpha < \beta$ எனில் $(\alpha - \beta)$ குறை மதிப்புடையது என நிறுவுக.

தெளிப்பு :

$\alpha > \beta$.

$\alpha + (-\beta) > \beta + (-\beta)$.

$\therefore \alpha + (-\beta) > 0$

$\therefore \alpha - \beta > 0$

$\therefore (\alpha - \beta)$ கூட்டு மதிப்புடையது.

$\alpha < \beta$ எனில் மேலே கூறியதுபோல் $(\beta - \alpha)$ கூட்டு மதிப்புடையது. எனவே $(\alpha - \beta)$ குறை மதிப்புடையது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\alpha = \beta$, $\beta > \gamma$ என்றால் $\alpha > \gamma$ என்று காட்டுக.

தெளிப்பு :

$\alpha = (L_1, U_1)$ $\beta = (L_2, U_2)$ $\gamma = (L_3, U_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$\alpha = \beta$, எனில் L_1, L_2 என்ற இரண்டும் சரிவ சமம் போலும் $\beta > \gamma$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே L_2 ஆனது L_3 -ன் சரியான பகுதியாகும் (Proper part).

$\therefore L_2, L_3$ -ன் சரியான பகுதி.

$\therefore \alpha > \gamma$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

எல்லாக் கூட்டு மெய்யெண்களும் குறை மெய்யெண்களை விடப் பெரியவை என நிறுவுக.

தெளிப்பு :

$\alpha = (L_1, U_1)$; $\bar{\alpha} = (L_2, U_2)$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், பூச்சியம் U_2 ன் மீச்சிறு உறுப்பாகும். எனவே L_1 -ல் உள்ள உறுப்புகள் குறை மெய்யெண்களாகும். எனவே L_2 , L_1 -ன் சரியான பகுதியாகும்.

$$\therefore \alpha > \bar{\alpha}$$

$$\therefore \alpha > L_2 \text{ ல் உள்ள உறுப்பு (ஒரு குறை மெய்யெண்).}$$

$$\therefore \text{கூட்டு மெய்யெண்} > \text{குறை மெய்யெண்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\alpha > \beta \text{ ஆனால் } -\alpha < -\beta \text{ ஆகும்.}$$

$$\alpha > \beta \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore \alpha + (-\alpha) > \beta + (-\alpha).$$

$$\bar{\alpha} > \beta + (-\alpha)$$

$$(-\beta) + \bar{\alpha} > [(-\beta) + \beta] + (-\alpha)$$

$$(-\beta) + \bar{\alpha} > \bar{\alpha} + (-\alpha)$$

$$\therefore (-\beta) > (-\alpha)$$

எடுத்துக் காட்டு 5 :

$$(i) \frac{2}{8}, (ii) \frac{855}{118} \text{ என்ற விகிதமுறு எண்களின் தொராசு}$$

மதிப்பைக் காண்க.

$$\frac{2}{8} = \left(\frac{20}{8} \right) \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{20}{8} \right) = \frac{1}{10} \left(2 + \frac{2}{8} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{8} \\
&= \frac{8}{10} + \frac{1}{10^2} \times \left(\frac{20}{8} \right) \\
&= \frac{8}{10} + \frac{1}{10^2} \left(2 + \frac{2}{8} \right) \\
&= \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{2}{8} \\
&= \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{1}{10^3} \left(\frac{20}{8} \right) \\
&= \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{1}{10^3} \left(2 + \frac{2}{8} \right) \\
&= \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{1}{10^3} \times \frac{2}{8}.
\end{aligned}$$

$$\therefore 0.8888 < \frac{8}{9} < 0.8889 \text{ ஆகும்.}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \frac{355}{118} &= 3 + \frac{18}{118} \\
&= 3 + \frac{1}{10} \left(\frac{180}{118} \right) \\
&= 3 + \frac{1}{10} \left(1 + \frac{48}{118} \right) \\
&= 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{48}{118} \\
&= 3 + \frac{1}{10} + \frac{12}{10^2} \left(\frac{480}{118} \right) \\
&= 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \left(2 + \frac{104}{118} \right) \\
&= 3 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{104}{118}
\end{aligned}$$

q ஒரு முழு எண். எனவே p^2 -ம், $2q^2$ -ம் முழு எண்களையாகும். எனவே p^2 -ம் ஒரு முழு எண். மேலும் p^2 -ஆனது $2q^2$ -க்கு சமமானவாகும், p^2 ஐ 2 ஆல் வகுக்கலாம்.

அதாவது p^2 -ல் ' 2 ' ஒரு காரணியாக உள்ளது.

$p = 2n$ என்று கொண்டால் (n ஒரு முழு எண்)

$$p^2 = 2q^2$$

$$\therefore 4n^2 = 2q^2$$

$$\therefore q^2 = 2n^2.$$

எனவே, q ஐவும் 2 ஆல் வகுக்கலாம்.

எனவே p -க்கும், q -க்கும் 2 பொதுக் காரணியாக உள்ளது. இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு மூன்றாடாக உள்ளது. அதாவது நாம் $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என்று எழுதலாம்.

எனவே $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியாது.

(ii) 3 -ன் வர்க்க மூலம் ஒரு விகிதமுறு எண் இல்லை என நிறுவுக.

$\sqrt{3}$ விகிதமுறு எண் என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், p -க்கும் q -க்கும் பொதுக் காரணி இராது.

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \quad \therefore p^2 = 3q^2.$$

q ஒரு முழு எண். எனவே q^2 ,-ம், $3q^2$ -ம் முழு எண்களாகும்.

$\therefore p^2 = 3q^2$ ஒரு முழு எண். மேலும் p^2 , 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். எனவே p , q என்ற இரண்டும் 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும். எனவே p , 3 ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

$$\therefore p = 3n$$

$$\therefore (3n)^2 = p^2 = 3q^2$$

$$\therefore q^2 = 3n^2.$$

∴ a -ம் \mathbb{R} ஆம் மீதியின்றி வகுபடும். எனவே p, q என்ற இரண்டும் \mathbb{R} ஆம் மீதியின்றி வகுபடும். இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு மூலப்பாடாயினது. எனவே $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் இல்லை.

பயிற்சி 1

- I. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களை விகிதமுறு எண்கள் எனக் காட்டு.

 - (i) 5 (ii) $-\sqrt{5}$ (iii) $2\sqrt{2}$ என திருப்தி.

- II. கீழே கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் என்று காட்டு.

 - $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{21}$.

- III. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ என்ற எண் விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியுமாது என திருப்தி.
- IV. இரண்டு கூட்டு மெய்யெண்களின் கூட்டுத் தொகை கூட்டு மெய் எண் என்று திருப்தி.
- V. p ஒரு விகிதமுறு எண், q ஒரு விகிதமுறு எண் என்றால்,
 - (i) $p+q$ ஒரு விகிதமுறு எண் (ii) $p \cdot q$ ஒரு விகிதமுறு எண் ($p \neq 0$) என்று காண்.
- IV. $\alpha_1 = (L_1, U_1)$; $\alpha_2 = (L_2, U_2)$ எனில், L_1 -ஹும், U_1 -ஹும் சில உறுப்புகள் பொதுவாக இருக்குமாயில் $\alpha_1 > \alpha_2$ என திறவுக.
- VII. திறவுக:
 - (i) $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$.
 - (ii) $-(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$.
 - (iii) $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$ எனில் $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

2. கந்தழித் தொடர் முறைகள்- எல்லைகள்

(Infinite Sequences and Limits)

2.1. தமக்கு துண்கணிதத்திலிருந்து எல்லைகள் பற்றி ஓரளவு பொதுவாகத் தெரியும். இம் வத்தியாயத்தில் "எல்லை" என்றும் என்ன என்பதைப் பற்றியும், அதைப்பற்றிய சில கருத்துக்களை வரையறுத்தும், துட்பமாக ஆராய்வோம்.

2.2. மட்டு (Modulus)

x என்ற எண் மட்டு என்னுமிதும் x அல்லது குறை என்னுமிதும் x சரி, அதன் குறையை எடுத்துக் கொள்ளாது என் மதிப்பை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோமானால், அதுவே x -ன் மட்டு மதிப்பு என்கிறோம். இதையே 'மட்டு x ' என்று படிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக :

$$| 5 | = | -5 | = 5.$$

$$(i) \quad x > y \text{ ஆனால் } | x - y | = x - y \\ | 7 - 5 | = 7 - 5 = 2.$$

$$(ii) \quad x < y \text{ ஆனால் } | x - y | = y - x \\ | 5 - 8 | = 8 - 5 = 3.$$

$$(iii) \quad | x + y | = | x | + | y | \\ | 4 + 3 | = 7 = | -4 - 3 |$$

x -ம் y -ம் ஒரு குறையைக் கொண்டன.

$$(iv) \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

x -ம் y -ம் வெவ்வேறு குறியை உடையன.

$$(v) \quad |x+y+z+\dots| \leq |x| + |y| + |z| + \dots$$

$$(vi) \quad |x| < \varepsilon \text{ ஆனால் } -\varepsilon < x < \varepsilon.$$

$$(vii) \quad |x| < \varepsilon \text{ ஆனால் } -\varepsilon < x < \varepsilon \text{ இங்கு } \varepsilon \text{ என்பது ஒரு கூட்டெண்.}$$

$$|x-a| < \varepsilon \text{ ஆனால் } a-\varepsilon < x < a+\varepsilon.$$

$$(viii) \quad |x| > H \text{ ஆனால் } x > H \text{ அல்லது } x < -H. \text{ இங்கு } H \text{ ஒரு கூட்டெண்.}$$

2-3. எக்ஸ்கன் :

ε , M , N என்ற குறிகள் :

ε என்பது கொடுக்கப்பட்ட அல்லது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் மிகச் சிறிய கூட்டெண். எ. கர. : $\varepsilon = .005, .00001 \dots$

M என்பது கொடுக்கப்பட்ட அல்லது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் ஏதாவது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணைக் குறிக்கும். எ. கர. $M = 500, 10000 \dots$ அதேக இடங்களில் M -க்கும் ε -க்கும் தொடர்புண்டு.

N என்பது மிகப் பெரிய எண்ணைக் குறிக்கும்.

2-4. ஊதாயதை :

ε கொடுக்கப்பட்ட மிக மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாக இருக்கட்டும். a திட்டமான எண் எனில் $|x-a|$ ஆனது ε ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும்படி x -ன் மதிப்பு கிடைக்குமாயின், x ஆனது a என்ற எக்ஸ்கனைய நெருங்குகிறது என்று கூறுகிறோம். இதை நாம் $x \rightarrow a$ என்ற குறியீட்டில் குறிப்பிடுகிறோம்.

N என்பது கொடுக்கப்பட்ட மிக மிகப் பெரிய எண்ணாக இருப்பினும், x -க்கு N ஐவிட அதிகமான ஒரு மதிப்பு கிடைக்குமாயின், x உத்தமியை நெருங்குகிறது என்கிறோம்.

இதை $x \rightarrow +\infty$ என்று குறிப்பிடலாம்.

$x \rightarrow +\infty$ ஆனால் $-x \rightarrow -\infty$ என்கிறோம்.

$\epsilon > 0$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சிறிய கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண் என்க. a, l என்பவை திட்டமான எண்கள் எனில், $0 < |x - a| < \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கூடக்கிய எண்ண x -க்கும்,

(i) $|f(x) - l| < \epsilon$ என்று அமைவுடைய ஒரு η -ஐக் காண முடியுமாயின் எக்லை $f(x) = l$ எனப்படும். (ii) N என்ற

கொடுத்துள்ள மிகப் பெரிய எண் எதுவாயினும் $f(x) > N$ என்ற அமைவுடைய ஒரு η -ஐக் காண முடியுமாயின் எக்லை $f(x) = \infty$ எனப்படும்.

2.5. தேற்றம் 1 :

எக்லை $f(x) = l$ ஆனால் எக்லை $k(f(x)) = kl$ ஆகும்.

இங்கு k ஒரு மாறிலியாகும்.

தெளிப்பு :

ϵ கொடுக்கப்பட்ட மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாக இருக்கட்டும். $\frac{\epsilon}{|k|}$ -ம் ஒரு கூட்டெண்ணாகும்.

எக்லை k வகையானது, ϵ என ஒரு மிகச் சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டால், $0 < |x - a| < \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக் கூடக்கி, x அமைவுடைய $\frac{\epsilon}{|k|}$ என்ற கூட்டெண்ணைக் காணலாம்.

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

$$\therefore |k| \cdot |f(x) - l| < \epsilon$$

அதாவது $|kf(x) - kl| < \epsilon$

$$\therefore \text{எக்லை } kf(x) = kl$$

2.6. தேற்றம் 2 :

எக்லை $f_1(x) = l_1$, எக்லை $f_2(x) = l_2$ ஆனால்

எக்லை $[f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2$

தெரியு :

ϵ கொடுக்கப்பட்ட எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகியும், $\frac{\epsilon}{2}$ -ம் ஒரு கூட்டெண்ணாகும்.

எல்லை வகைவகையாக, ϵ என ஒரு மிகச் சிறிய எண் கொடுக்கப்பட்டாக,

$0 < |x-s| < \eta_1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்டவகைய x -ன் மதிப்புகளுக்கு $|f_1(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$ எனும்படி η_1 லுயும்,

$0 < |x-s| < \eta_2$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்டவகைய x -ன் மதிப்புகளுக்கு, $|f_2(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ எனும்படி η_2 லுயும் காணலாம்.

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x) - l_1 - l_2| &= |[f_1(x) - l_1] \\ &\quad + [f_2(x) - l_2]| \\ &< |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| \end{aligned}$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2)$ -இவற்றில் சிறியது எனக் கொண்டாக $0 < |x-s| < \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்டவகைய x -ன் எவ்வாறு மதிப்புகளுக்கும் $|f_1(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$, $|f_2(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ என ஆமையும்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } |f_1(x) + f_2(x) - l_1 - l_2| &= |(f_1(x) - l_1) + (f_2(x) - l_2)| \\ &< |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ எல்லை } [f_1(x) + f_2(x)] = l_1 + l_2, \\ x \rightarrow s$$

அதேபோல,

$$\text{எல்லை } [f_1(x) - f_2(x)] = l_1 - l_2 \text{ என நிறுவலாம்,} \\ x \rightarrow s$$

2.7. தேற்றம் 3 :

எல்லை $f_1(x) \rightarrow l_1$, எல்லை $f_2(x) = l_2$ ஆகும்
 $x \rightarrow a$ $x \rightarrow a$

எல்லை $[f_1(x) \cdot f_2(x)] \rightarrow l_1 \cdot l_2$ ஆகும்.
 $x \rightarrow a$

தெரியு :

ϵ என்பது கொடுக்கப்பட்ட மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகும்

$$\frac{\epsilon}{2(1 + |l_2|)}, \quad \frac{\epsilon}{2(1 + |l_1|)},$$

என்பவைகளும் கூட்டெண்ணேயாகும்.

$0 < |x-a| < \eta_1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைத்த எல்லா x -க்கும் $|f_1(x)-l_1| < \frac{\epsilon}{2(1 + |l_1|)} = \epsilon_1$ (1)

எனவும்,

$0 < |x-a| < \eta_2$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைத்த எல்லா x -க்கும் $|f_2(x)-l_2| < \frac{\epsilon}{2(1 + |l_2|)} = \epsilon_2$

எனவும் அமைப்போடு η_1, η_2 என்ற கூட்டெண்களைக் காணலாம்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } [f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 l_2] &= [f_1(x) - l_1][f_2(x) - l_2] \\ &\quad + l_1 [f_2(x) - l_2] \\ &\quad + l_2 [f_1(x) - l_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 l_2| &< |f_1(x) - l_1| \cdot |f_2(x) - l_2| \\ &\quad + |l_1| |f_2(x) - l_2| + |l_2| |f_1(x) - l_1| \\ &< \epsilon_1 \epsilon_2 + |l_1| \epsilon_2 + |l_2| \epsilon_1 \end{aligned}$$

η என்ற கூட்டெண் η_1, η_2 என்பவற்றுள் சிறியதைக் குறிக்குமாறு கொண்டால் $0 < |x-a| < \eta$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைத்த x -ல் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$|f_1(x) - l_1| < \epsilon_1, \quad |f_2(x) - l_2| < \epsilon_2 \text{ என அமைப்பும்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore |f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 l_2| &< \epsilon_1 (\epsilon_2 + |l_2|) + \epsilon_2 |l_1| \\ &< \epsilon_1 (1 + |l_2|) + \epsilon_2 (1 + |l_1|) \end{aligned}$$

$$< \frac{\epsilon}{2(1+|l_2|)} \cdot (1+|l_2|) + \frac{\epsilon}{2(1+|l_1|)} \cdot (1+|l_1|) < \epsilon.$$

$$\therefore \text{எல்லா } [f_1(x) f_2(x)] = l_1 l_2, \\ x \rightarrow a$$

2.8. தததததததததததத 1 :

$$\text{எல்லா } f_1(x) = l_1 \quad \text{எல்லா } f_2(x) = l_2 \dots \dots \\ x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$$

$$\dots \text{எல்லா } f_n(x) = l_n \text{ ஆகும்,} \\ x \rightarrow a$$

$$\text{எல்லா } f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) = l_1 l_2 \dots l_n \text{ ஆகும்,} \\ x \rightarrow a$$

தததததததததததத 2 :

n ஒரு கூட்டு எண்ணாகும்,

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = x \text{ என்கும்}$$

$$\text{எல்லா } f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) = \text{எல்லா } x^n = a^n \text{ ஆகும்,} \\ x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$$

2.9. தததததததததததத 4 :

$$\text{எல்லா } f(x) = l \text{ ஆகும், எல்லா } \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l} \quad (l \neq 0) \\ x \rightarrow a \quad \quad \quad x \rightarrow a$$

தததததத :

$l > 0$ என்று கொள்வோம்,

$l - \epsilon = k > 0$ என்று கட்டுப்பாட்டில் ϵ என்ற கூட்டு எண் எடுத்துக் கொள்வோம்.

ϵ மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகும், $0 < |x-a| < \eta_1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைத்த x -ன் மதிப்புகளுக்கு $|f(x) - l| < \epsilon$ எனும்படி ஒரு η_1 காணலாம்.

$$\text{எல்லா } f(x) = l, \\ x \rightarrow a$$

$$\therefore f(x) > l - \epsilon = K > 0.$$

$$\therefore \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{K}.$$

ϵ என்ற கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுண்ம மிக மிகச் சிறியதாக இருந்தால் k/l -ன் மிகச் சிறியது.

எனவே, η_1, η_2 என்ற கூட்டுண்மங்களை, $0 < |x-a| < \eta_2$ என்ற கூட்டுப்படிகல் அமைத்த x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $|f(x)-l| < kl$ என அமைப்பதாக காணலாம்.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| &= \left| \frac{l-f(x)}{f(x)l} \right| \\ &= \frac{|f(x)-l|}{f(x)l} \end{aligned}$$

$\eta = (\eta_1, \eta_2)$ என்பவற்றுள் சிறியது எனில், $0 < |x-a| < \eta$ என்றும்படி அமைத்த x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|f(x)-l|}{f(x)l} < \frac{kl}{kl} = \epsilon.$$

$$\therefore \text{எல்லா } \frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{l} \quad \text{... .. (1)}$$

$l < 0$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $l = -m$, $m > 0$

தேற்றம் 1-ன் படி, எல்லா $[-1, f(x)] = -1, l = m > 0$,

$$l\text{-ன் மூலம், எல்லா } \left[\frac{1}{-f(x)} \right] = \frac{1}{m}.$$

$$\text{எல்லா } (-1) \times \frac{1}{-f(x)} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{l}.$$

$$\text{எல்லா } \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}.$$

2-10. தேற்றம் 5 :

$$\text{எல்லா } f_1(x) \rightarrow l_1, \quad \text{எல்லா } f_2(x) \rightarrow l_2 \text{ ஆகவும்,}$$

$$x \rightarrow a$$

$$x \rightarrow a$$

$$\text{எக்ஸிஸ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad (l_2 \neq 0).$$

தெரிப்பு :

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸிஸ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} &= \text{எக்ஸிஸ } \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \times \text{எக்ஸிஸ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f_2(x)} \\ &= l_1 \times \frac{1}{l_2} \\ &= \frac{l_1}{l_2}. \end{aligned}$$

2-11. N கொடுக்கப்பட்ட மிகப் பெரிய கூட்டெண்ணாக இருக்கட்டும். $0 < |x-a| < \delta$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அடங்கிய எக்ஸிஸ x -க்கும் $f(x) > N$ என்று அமையுமாறு ஒரு δ இக் கான முடியுமெனில் x ஆனது a ஐ நெருங்கும்போது, $f(x)$ கத்தழியை நெருங்குகிறது என்கிறோம்.

இதையே நாம் எக்ஸிஸ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பிடுகிறோம்.

2-12. தொடர்ச்சியான சார்புகள் (Continuous functions)

வகையறை : ϵ என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப் பட்டு $|x-a| < \delta$ எனினும்படியான x -ன் மதிப்புகளுக்கு,

$|f(x) - f(a)| < \epsilon$ என்று பொருத்தும்படி δ என்ற கூட்டெண் கண்டுபிடிக்க முடியுமானால், $f(x)$ ஆனது, $x=a$ என்ற புள்ளியில் x -ன் தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

$x = a$ -ல் $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பானால்,

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸிஸ } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) &= \text{எக்ஸிஸ } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

அதாவது, எக்ஸிஸ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ என்பது, x -ன் மதிப்பு a -க்கும் மேலே

உள்ளப் மதிப்புகளைப் பெற்று, பின்பு a -ன் மதிப்பை நெருங்கு மானால் கிடைக்கும் எக்ஸிஸைக் குறிக்கும்.

இதையே நாம், எக்ஸிஸ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

x -ன் மதிப்பானது a க்குத் தீரே உள்ள மதிப்புக்களைப் பெற்று
யின்று a -ன் மதிப்பை நெருங்குமானால் கிடைக்கும் எல்லை எயக்
குறிக்கும். இதை நாம் எல்லை $f(x) = f(a)$ என்று குறிப்பிடு
கிறோம். $x \rightarrow a = 0$

2.13. (a, b) என்ற இடைவெளியில் (Interval) தொடர்ச்சி
யான சார்பு

(a, b) என்ற இடைவெளியிலுள்ள x -ன் ஒவ்வொரு மதிப்
பிற்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சியாக இருப்பின், $f(x)$ ஆனது (a, b)
என்ற இடைவெளியில் x -ன் தொடர்ச்சியான சார்பு எனப்படும்.

2.14. தேற்றம் 6 :

எல்லை $\frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$, n ஒரு விகிதமுறு எண்,
முதலாவதாக, n ஒரு கூட்டு முழு எண் என்று எடுத்துக்கொள்
வோம்.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2} a + x^{n-3} a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எல்லை } \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \text{எல்லை } x^{n-1} + \text{எல்லை } x^{n-2} a + \\ &\dots + \text{எல்லை } a^{n-1} \\ &= a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} \\ &= n a^{n-1} \end{aligned}$$

இரண்டாவதாக n ஒரு குறை முழு எண்ணாக இருந்தால்,
அதாவது, $n = -m$, m ஒரு கூட்டு முழு எண் ஆனால்

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a} = \frac{a^m - x^m}{a^m x^m (x - a)} \\ &= - \frac{x^m - a^m}{x - a} \cdot \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{a^m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எல்லை } \frac{x^n - a^n}{x - a} &= - \text{எல்லை } \frac{x^m - a^m}{x - a} \cdot \text{எல்லை } \frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{a^m} \\ &= - m a^{m-1} \cdot \frac{1}{a^{2m}} \end{aligned}$$

$$= -na^{n-1}$$

$$= n \cdot a^{n-1}$$

மூன்றாவதாக $n = \frac{p}{q}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், q ஒரு கூட்டு முழு எண், p கூட்டு அல்லது குறை முழு எண்ணாக இருக்கலாம்.

$$x = y^q, a = b^q \text{ என்று எடுத்துச் சொல்வோம்}$$

$$y = x^{1/q}, b = a^{1/q} \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

$$x \neq a \text{ ஆனால் } x^{1/q} \neq a^{1/q} \text{ அதாவது } y \neq b \text{ ஆனால்.}$$

$$\frac{x^q - a^q}{x - a} = \frac{(y^q)^q - (b^q)^q}{y^q - b^q}$$

$$= \frac{y^q - b^q}{y^q - b^q}$$

$$= \frac{(y^q - b^q)(y - b)}{(y^q - b^q)(y - b)}$$

$$\therefore \text{எல்லாம் } \frac{x^q - a^q}{x - a} = \frac{y^q - b^q}{y - b}$$

$$\times \frac{\text{எல்லாம்}}{y \neq b} \frac{1}{y^q - b^q / y - b}$$

$$= p \cdot b^{p-1} \times \frac{1}{q \cdot b^{q-1}}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot b^{p-1}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot a^{(p-1)/q} = \frac{p}{q} a^{\frac{p}{q}-1}$$

$$= na^{n-1},$$

2.15. தொடர் மூன்றாம் (Sequences)

ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விதிப்படி எண்களைத் தொடர்புபடுத்தி எழுதினால் அத் தொடரை, தொடர் மூன்றாம் என்று அழைக்கிறோம். $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ என்ற தொடர் மூன்றாம்

$\{a_n\}$ அல்லது (a_n) என்று சுருக்கமாக எழுதலாம். இங்கு a_n என்பது தொடர் மூலையில் n ஆவது உறுப்பாக குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$1, 3, 5, 7 \dots (n+1) \dots$$

$$2, 4, 8 \dots 2^n \dots$$

$$3, -3, 3, -3 \dots (-1)^{n-1} \cdot 3, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n} \dots$$

'மூடினை' அல்லது 'கத்தழி' என்று கூறுவதால், ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் அடுத்து மற்றோர் உறுப்பு உண்டு என்பதே பொருளாகும்.

2.10. n கத்தழியை நெருங்கும்போது, a_n ஆனது l என்ற திட்டமான எல்லையை நெருங்குமானால், (a_n) எனும் தொடர் மூலை ஒரு குறித் தொடர் மூலை (convergent sequence) அல்லது குடியம் தொடர் மூலை எனப்படும்.

அதாவது கொடுக்கப்பட்டுள்ள l எனும் மிகச் சிறிய, ஒவ்வொரு கூட்டெண்ணுக்கும் தக்கவாறு $n > n$ என்ற மதிப்பு களுக்கு $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ என்ற கட்டுப்பாடு பொருத்தும் வகையில் n என்ற கூட்டு முழு எண் காண முடியுமானால்,

(a_n) என்ற கத்தழித் தொடர்மூலை l என்ற எல்லையை நெருங்குகிறது. அதாவது எல்லை $a_n = l$ எனில் $\{a_n\}$, l என்ற எல்லையை நெருங்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n} \text{ என்ற தொடர் மூலையை எடுத்துக் கொள்வோம். இது ஒரு குறித் தொடர்.}$$

$a_n = \frac{1}{n} \in$ கொடுக்கப்பட்டால், $n > n - \frac{1}{\epsilon}$ (முழு எண்) மதிப்பிற்கு $|a_n - 0| < \epsilon$ எனவே $(a_n) \rightarrow 0$

$$\text{எல்லை} \quad \text{எல்லை} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

2-17. (a_n) என்ற தொடர் மூன்ற கத்தழி எக்லிகை தெருக்கு ஸாகின் அது ஒரு விரி தொடர் மூன்ற (Divergent Sequence) எனப் படுக.

அதாவது, எக்லிக $(a_n) = \pm \infty$ ஆனது (a_n) என்ற தொடர் $n \rightarrow \infty$ மூன்ற ஒரு விரி தொடர் மூன்றவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

1, 4, 9, 16 n^2 என்ற தொடர்மூன்ற ஒரு விரி தொடர் மூன்றவாகும்.

$$\begin{aligned} \text{எக்லிக } (a_n) &= \text{எக்லிக } n^2 \\ n &\rightarrow \infty & n &\rightarrow \infty \\ &= \infty. \end{aligned}$$

2-18. (a_n) என்ற தொடர் மூன்ற மேலே கூறப்பட்ட இரு தொடர் மூன்றகளில் எதுவுமாக இல்லாதிருக்குமானால், அத் தொடர் மூன்ற அலை தொடர் மூன்ற (Oscillating Sequence) எனப் படுக.

எடுத்துக்காட்டு :

1, -1, 1, -1 ... இத்தொடர் மூன்ற ஒரு குறிப்பிட்ட எக்லிகை தெருக்காகம் (-1) -க்கும் '1'-க்கும் இடைப்பட்டு அலைகிறது. ஏனெனில் இங்கு $a_n = +1$ அல்லது -1 . எனவே எக்லிக $a_n = +1$ அல்லது -1 . எனவே இத் தொடரை அலை $n \rightarrow \infty$ தொடர் மூன்ற என்கிறோம்.

2-19. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$ எனில் (a_n) என்ற தொடர் மூன்ற குறியல்பான இறங்கும் தொடர் மூன்ற (Monotonic decreasing sequence) எனப்படும்.

$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$ இத் தொடர் மூன்ற கண்டிப்பான குறியல்பான இறங்கும் தொடர் மூன்ற (Strictly monotonic decreasing sequence) எனப்படும்.

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ என்ற தொடர் மூன்றை குறியல்பான ஏறும் தொடர் மூன்ற (monotonic increasing sequence) எனப்படும்.

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ என்ற தொடர்மூன்ற கண்டிப்பான குறியல்பான ஏறும் தொடர் மூன்ற (Strictly monotonic increasing sequence) எனப்படும்.

ஒரீயல்பான ஏதும் தொடர் முறை, ஒரீயல்பான இறங்கும் தொடர் முறை-இவை ஒவ்வொன்றும் ஒரீயல்பானவை எனக் கூறப்படும்.

2-20. தொடர் முறைகளில் $L < a_n < M$ என்ற சமன்க் கைக்கொப்பு, n -க் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், L, M என இரு எண்கள் காண முடியுமானால் அத் தொடர் முறைக்கு L என்பது கீழ் வரம்பு (Lower bound) எனவும், M என்பது அதர்மேல்வரம்பு (Upper bound) எனவும் அழைக்கப்படும்.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சில முடிவுகளைத் தெரிப்பீசுத் ஏற்றுக் கொள்வோம்.

(1) ஓர் ஒரீயல்பான ஏதும் தொடர் முறை மேல் வரம்பு உடையதாக அத் தொடர் குறி தொடர் முறைவாகும்.

(2) ஓர் ஒரீயல்பான ஏதும் தொடர் முறை மேல் வரம்பு இல்லாது $-\infty$ ஐ அருக்குமாகில் அத் தொடர் விரி தொடர் முறைவாகும்.

(3) ஓர் ஒரீயல்பான இறங்கும் தொடர் முறை கீழ் வரம்பு உடையதாக இருக்குமானால், அத் தொடர் குறி தொடர் முறை வாகும்.

(4) ஓர் ஒரீயல்பான இறங்கும் தொடர் முறை கீழ் வரம்பு இல்லாது $-\infty$ ஐ அருக்குமாகில் அத் தொடர் விரி தொடர் முறை எனப்படும்.

(5) (a_n) என்ற தொடர் முறை l_1 என்ற எல்லைக்குக் குவித்து, (b_n) என்ற தொடர் முறை l_2 என்ற எல்லைக்குக் குவித் தால்,

- (i) (ka_n) என்ற தொடர் முறை kl_1 -க்குக் குவிவும் ;
- (ii) $(a_n \pm b_n)$ என்ற தொடர் முறை $l_1 \pm l_2$ என்ற எல்லைக்குக் குவிவும் ;
- (iii) $(a_n b_n)$ என்ற தொடர் முறை $l_1 l_2$ என்ற எல்லைக் குக் குவிவும் ;
- (iv) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ என்ற தொடர் முறை $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)$ என்ற எல்லைக் குக் குவிவும். இக்கு $l_2 \neq 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

கவனிக்க :

ஒரு தொடர் முறை பூச்சியத்திற்குக் குவியுமானால் அத் தொடர் குவியத் தொடர் முறை எனப்படும்.

2.21. $x > 1$ ஆனால் (x^n) என்ற தொடர் முறை ஒரு விகித தொடர் முறையாகும். $|x| < 1$ ஆனால் (x^n) என்ற தொடர் முறை ஒரு குவியத் தொடர் முறையாகும்.

தெரியு: $x > 1$ என்று கொள்வோம். எனவே $x = 1 + \alpha$ α ஒரு கூட்டெண்.

$$x^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha.$$

$$\therefore \text{எக்ஸி} \quad x^n > \text{எக்ஸி} (1 + n\alpha) = \infty \\ n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{எக்ஸி} \quad x^n = \infty. \\ n \rightarrow \infty$$

$\therefore x > 1$ -க்கு, (x^n) என்பது ஒரு விகித தொடர் முறையாகும்.

(ii) $0 < x < 1$ என்றும்,

$$x = \frac{1}{1 + \alpha} \text{ ஆகும். } \alpha > 0.$$

$$\therefore x^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{1 + n\alpha}$$

$$\therefore 0 < x^n < \frac{1}{1 + n\alpha}.$$

$$\text{எக்ஸி} \quad \frac{1}{1 + n\alpha} = 0. \\ n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{எக்ஸி} \quad x^n = 0. \\ n \rightarrow \infty$$

$\therefore 0 < x < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு (x^n) என்ற தொடர் முறை ஒரு குவியத் தொடர் முறையாகும்.

(iii) $-1 < x < 0$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே, $x = -y$ ஆனால் $0 < y < 1$ ஆகும்.

$$\begin{aligned}
 \text{எக்ஸ் } x^n &= \text{எக்ஸ் } (-y)^n \\
 n \rightarrow \infty & \quad n \rightarrow \infty \\
 &= \text{எக்ஸ் } (-1)^n \text{ எக்ஸ் } (y)^n \\
 n \rightarrow \infty & \quad n \rightarrow \infty \\
 &= \pm 1 \times 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$\therefore -1 < x < 0$ -க்கு (x^n) என்ற தொடர்முறை ஒரு குனியத் தொடர் முறையாகும்.

குறிப்பு : $x = +1$ ஆனால் (x^n) என்ற குறி தொடர்முறை 1-க்குக் குறிக்கிறது.

$x < -1$ ஆனால் (x^n) என்ற தொடர் முறை, அந் தொடர் முறையாகும்.

2.22. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ஆனால் (a_n) ஒரு குறி தொடர் முறையாகும். இது ஒரு திட்டமான எக்ஸ் e ஐப் பெற்றது.

குறிப்பு :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

எனவே (a_n) ஓர் குனியப்பாண ஏதும் தொடர் முறையாகும்.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
 &= 1 + \frac{1}{\underline{1}} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\underline{2}} \\
 &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\underline{3}} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{[n]} \\
 & < 1 + \frac{1}{[1]} + \frac{1}{[2]} + \frac{1}{[3]} + \dots + \frac{1}{[n]} \\
 & < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
 & = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 & = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
 & < 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{மேலும் } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{[1]} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{[2]} + \dots \\
 & \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{[n]} \\
 & = 2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{[2]} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{[n]}
 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n > 2.$$

$$\therefore 2 < a_n < 3.$$

$\therefore (a_n)$ ஓர் ஓசியம்பான ஏதும் தொடர் மூலதனம் கிழ வாய்ப்பும், மேல் வாய்ப்பும் பெற்றுள்ளது. எனவே (a_n) ஓரு குறி தொடர் மூலதனமாகும். அதன் எக்ஸாஸ் 'e' என்று குறிப்பிடப்படும்.

அதாவது,

$$\begin{aligned}
 \text{எக்ஸாஸ் } a_n &= \text{எக்ஸாஸ் } \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \\
 n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

2-23. தேற்றம் 7 :

(a_n) என்ற கூட்டுக்களாக அமைந்த ஒரு தொடர் முறையில் n -ம் எண்ணு மதிப்புகளுக்கும், $n > n_0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1$ என்ற சமனின்மை பொருத்துமையின் (a_n) ஒரு விரி தொடர் முறையாகும்.

தெரியு :

$$n > n_0 \text{ ஆனால் } \frac{a_{n+1}}{a_n} > k$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} > k$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{a_{n+r}}{a_{n+r-1}} > k.$$

$$\therefore \frac{a_{n+r}}{a_n} = \frac{a_{n+r}}{a_{n+r-1}} \cdot \frac{a_{n+r-1}}{a_{n+r-2}} \dots \frac{a_{n+1}}{a_n} > k^r$$

$$\therefore a_{n+r} > k^r a_n$$

$$\therefore \text{எல்லா } k^r a_n = \infty, \text{ ஏனெனில் } k > 1, a_n \text{ ஒரு திட்ட } r \rightarrow \infty$$

மரண என்ற,

$$\therefore \text{எல்லா } a_n = \text{எல்லா } a_{n+r} = \infty, \\ n \rightarrow \infty \quad r \rightarrow \infty$$

$$\therefore (a_n) \text{ என்ற தொடர் முறை விரியும்.}$$

2-24. தேற்றம் 8 :

n -ம் எண்ணு மதிப்புகளுக்கும், $n > n_0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$ என்ற சமனின்மை பொருத்துமையின் (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் முறையாகும். k ஒரு மாநிலியாகும்.

தெரியு :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < k, \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| < k, \dots \left| \frac{a_{n+r}}{a_{n+r-1}} \right| < k$$

$$\therefore \left| \frac{a_{n+r}}{a_n} \right| = \left| \frac{a_{n+r}}{a_{n+r-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n+r-1}}{a_{n+r-2}} \right| \dots \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < k^r$$

$$\therefore 0 < |a_{n+r}| < k^r |a_n|.$$

$$\therefore \text{எக்ஸ்சன் } k^r |a_n| = 0. \text{ ஏனெனில் } k < 1, |a_n| \text{ ஒரு } r \rightarrow \infty$$

நிபந்தனா எண்ணாகும்.

$$\therefore |a_{n+r}| \rightarrow 0 \text{ எனவே } a_{n+r} \rightarrow 0.$$

$$\therefore \text{எக்ஸ்சன் } a_n = \text{எக்ஸ்சன் } a_{n+r} = 0, \\ n \rightarrow \infty \quad r \rightarrow \infty$$

$$\therefore (a_n) \text{ ஒரு குணியத் தொடர் முறையாகும்.}$$

2.25. தேற்றம் 9:

(a_n) கூட்டெண்ணால் அமைந்த ஒரு தொடர் முறையில் எக்ஸ்சன் $a_{n+1} = l > 1$ என்ற சமனின்மை பொருத்துமானில் (a_n) $n \rightarrow \infty$ a_n ஒரு விரி தொடர் முறையாகும். (l ஒரு மாநிலி).

தெரிப்பு :

எக்ஸ்சன் $\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. ஆகையால் ϵ எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணாகிலும் $n > n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருத்தும் என்பதே எக்ஸ்சன் வரையறையாகும்.

$$\text{ஆகவே } \frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \epsilon \text{ ஆகும்.}$$

ஏனெனில் $l > 1$. ஆதலால் $l - \epsilon > 1$ என அமைவுறாது ϵ -ஐ மிகச் சிறிய கூட்டெண் எதிர்ப்புடையதாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore l - \epsilon = k \text{ என்போம். } k > 1 \text{ ஆகிறது.}$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 1 \quad \therefore \text{தேற்றம் 7-ன்மடி } (a_n) \text{ என்ற தொடர் முறை விரிவாகும்.}$$

2.26. தேற்றம் 10 :

எக்ஸ் $n \rightarrow \infty$ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l < 1$ (l மாதிரி) ஆனால் (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் மூன்றயாகும்.

தெரியு :

$$\text{எக்ஸ் } n \rightarrow \infty \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l.$$

எனவே, $n > n_0$ -க்கு ϵ மிகச் சிறிய கூட்டெண்,

$$\therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < l + \epsilon.$$

$l < 1$ எனில் $l + \epsilon < 1$ என்று அளவையும் வகைகளில் ϵ -ஐ மிகச் சிறிய கூட்டெண் மதிப்புடையதாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். $l + \epsilon = k$ எனலாம். $k < 1$ ஆகிறது.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < k < 1.$$

\therefore 8 ஆம் தேற்றத்தின்படி (a_n) ஒரு சூனியத் தொடர் மூன்றயாகும்.

2.27. k ஒரு பெய்யெண்ணாக இருப்பின், (n^k) என்ற தொடர் மூன்ற, $k > 0$ -க்கு ஒரு விரி தொடர் மூன்றயாகும். $k < 0$ -க்கு அத்தொடர் மூன்ற குவி தொடர் மூன்றயாகும். இதை நாம் தெரிப்பின் தி ஏற்றுக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$|r| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $a_n = n \cdot r^n$ ஆனால் எக்ஸ் $(a_n) = 0$ என நிறுவுக. (செ.ய.க.)

$n \rightarrow \infty$

$$a_n = n \cdot r^n.$$

$$\therefore a_{n+1} = (n+1) r^{n+1}$$

$$\therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1) r^{n+1}}{n \cdot r^n} \right| = \left| \frac{n+1}{n} \right| |r|$$

$$= \left| 1 + \frac{1}{n} \right| |r|$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எக்ஸி} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \text{எக்ஸி} \left| 1 + \frac{1}{n} \right| |r| \\ &= |r| < 1. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{எக்ஸி} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1. \text{ ஆகையால் தேற்றம் 10-ன் படி}$$

(a_n) ஒரு குணியத் தொடர் முறையாகும்.

$$\text{எனவே, எக்ஸி} (a_n) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(n^r x^n)$ என்ற தொடர் முறையின் தன்மையைப்பற்றி.

$$a_n = n^r x^n \quad a_{n+1} = (n+1)^r x^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எக்ஸி} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \text{எக்ஸி} \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^r x \right| |x| \\ &= |x| \end{aligned}$$

(i) $|x| < 1$ ஆனால் $(n^r x^n)$ ஒரு குணியத் தொடர் முறையாகும்.

$$(ii) \quad x > 1 \text{ ஆனால் எக்ஸி} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x > 1,$$

$\therefore (n^r x^n)$ ஒரு விரி தொடர் முறையாகும் (தேற்றம் 7).

$$(iii) \quad x < -1 \text{ ஆனால் எக்ஸி} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| > 1$$

எக்ஸி $|a_n| = \infty$ ஆனால் (a_n) என்ற தொடர் முறையில் ஒன்று $n \rightarrow \infty$

விட்டு ஒன்று உறுப்புகள் கூட்டு, குறை எண்ணாக இருப்பதால் (a_n) ஓர் அலை தொடர் முறையாகும்.

(iv) $x = 1$; $(n^r x^n) = (n^r)$ என்ற தொடர் முறை $r < 0$ ஆனால் குணியம். $r > 0$ ஆனால் விரியும்.

(vi) $x = -1$; $((-1)^r n^r)$ என்ற தொடர் முறை $r < 0$ க்குக் குணியம்; $r > 0$ ஆனால் அலைபும்.

பயிற்சி 2

- (1) பின்வரும் தொடர் முறைகளின் தன்மைகளையும், மேல், கீழ் வரம்புகளிருப்பின் அவைகளையும், எல்லைக்குப்பின் அங்கெல்லைகளையும் ஆற்றுக.

$$1. a_n = 1 + \left(\frac{n}{5}\right)$$

$$2. a_n = \frac{4^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$3. a_n = n[1 + (-1)^n]$$

$$4. a_n = 2 + (-1)^n$$

$$5. a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$6. a_n = n + \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$7. a_n = n^{1/n}$$

$$8. a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

- (2) பின்வரும் தொடர் முறைகளின் தன்மைகளையும், குறி தொடராயிருப்பின் அதன் எல்லைகளையும் ஆற்றுக.

$$1. a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$2. a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$3. a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$4. a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$5. a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n-1}$$

- (3) $a_n = n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ஆனால் எல்லை $(a_n) = 1$ என நிறுவுக.

- (4) $a_n = \frac{\log n}{n}$ ஆனால் எல்லை $(a_n) = 0$ என நிறுவுக.

- (5) $a_n = \frac{x^n}{n}$ ஆனால் எல்லை $(a_n) = 0$ என நிறுவுக.

- (6) $n \rightarrow \infty$ ஆனால், (i) $[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}]$ (ii) $\frac{n}{2^n}$ என்பவற்றின் எல்லைகளாக காண்க.

- (7) $a_n = \frac{1}{n^2}$ ஆனால் எல்லை $(a_n) = 0$ என நிறுவுக.

$$(8) \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

என்ற தொட்டி ஒத்தாமைத் தன்மைவை அறிக.

$$(9) \quad \text{எல்லை காண்க :} \quad \begin{array}{l} \text{எல்லை} \\ x \rightarrow a \end{array} \quad \frac{x^{4/5} - a^{4/5}}{x - a}$$

$$(10) \quad \begin{array}{l} \text{எல்லை} \\ (x+y)^p - (x-y)^p \end{array}$$

3. a. கத்தழி தொடர்கள்— குவிதல், வீரிதல்

(Infinite Series—Convergency & Divergency)

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ என்பதை நாம் ஒரு தொடர் என்று அழைக்கிறோம்.

தொடர்கள் இரண்டு வகைப்படும். (1) முடிவுள்ள தொடர் (2) முடிவில்லாத தொடர் அல்லது கத்தழித் தொடர் என இரண்டு வகைகள் உண்டு.

3.1. முடிவுள்ள தொடர் :

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புகள், குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை வரை இருக்குமானால் அதுவே முடிவுள்ள தொடர் என்ற அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக் காட்டாக $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ என்பது n உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுள்ள தொடராகும்.

3.2. முடிவில்லாத அல்லது கத்தழித் தொடர் :

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை கத்தழி வரைச் செல்லுமானால் அத்தொடர் கத்தழித் தொடர் அல்லது முடிவில்லாத தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு :

$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$ கத்தழி வரை - இப் பெருக்குத் தொடரின் உறுப்புகள் முடிவில்லாதவை.

ஒரு தொடரை $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ கத்தழி வரை என்று எழுதுவதற்குப்பதிலாக $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்று குறுக்கவாக

எழுதலாம். அதன் மூலம் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையை S_n என்று குறிப்பிடலாம்.

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

ஒரு முடிவுள்ள தொடரின் கூட்டுத் தொகை ஒரு திட்டவட்டமான எண்ணாகும். அதே போல் ஒரு கத்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகை திட்டமான எண்ணாகவோ, $- \infty$ அல்லது $+\infty$ ஆகவோ, திட்டமான எண்ணாக இல்லாமவோ, இருக்கலாம். நாம் இப்பகுதியில் கத்தழித் தொடரின் கூட்டுத் தொகையைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

3-3. சூலி தொடர் (Convergent Series)

n கத்தழியை எல்லியாக அடையும்போது, (S_n) என்ற தொடர் மூலம் ஒரு திட்டமான எண்ணை அடையுமானால் அக் கத்தழித் தொடர் ஒரு சூலி தொடராகும் (Convergent series).

இதை எல்லு $S_n \rightarrow S =$ திட்டமான எண் என்று எழுதலாம்.
 $n \rightarrow \infty$

எனவே, S என்பது ஒரு தொடரை கூட்டிப் பெறும் தொகையல்ல என்பதை நாம் மனதில் கொள்ள வேண்டும். S என்பது அத் தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் எல்லு ஆகும்.

3-4. லிசி தொடர் (Divergent Series) :

(S_n) என்ற தொடர் மூலத்தில் n கத்தழியை அடையுமோது S_n லிசித்து $-\infty$ அல்லது $+\infty$ ஐ அடையுமானால் அக்கத்தழித் தொடர் ஒரு லிசி தொடர் எனப்படும். இதைவே,

$$\text{எல்லு } S_n = -\infty \text{ அல்லது } +\infty \\ n \rightarrow \infty$$

என்று இருக்குமானால் அத்தொடர் லிசி தொடர் என்கிறோம்.

3.5 அலை தொடர் (Oscillating Series):

n எவ்வளவு பெரிதாக இருப்பினும், (S_n) என்ற தொடர் மூன்றாந்தரப்பட்ட எண்களுக்கு இடைப்பட்டே ஆகலது \pm க்கு இடைப்பட்டே ஆகாமலாகில், அதுவே ஒரு அலை தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு:

$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ என்ற தொடர் மூன்றாவில் $S_n = 1$ ஆகலது 0 (n ஒற்றைப்படை ஆகலது இரட்டைப்படை என்) $\therefore (S_n)$ என்ற தொடர்மூன்றை 1-க்கும் 0-க்கும் இடைப்பட்டே ஆகலதது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + x^{n-1} + \dots$ என்ற கத்தழித் தொடரை எடுத்துக் கொள்ளோம். இத்தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடராகும். இதன் பொது விலிதம் x ஆகும்.

$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1-x^n}{1-x}; \quad x < 1 \text{ ஆக இருக்கும்பொது.} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} \end{aligned}$$

(i) $|x| < 1$ எனில் $x^n \rightarrow 0$

$$\text{எனவே, எல்லா } S_n = \frac{1}{1-x} \quad n \rightarrow \infty$$

(ii) $x > 1$ எனில், $x^n \rightarrow \infty$ எனவே, எல்லா $S_n = \infty$.
 $n \rightarrow \infty$

வினக்கம்:

(i) $x = \frac{1}{2} < 1$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

n எவ்வளவு பெரிதாக இருப்பினும்,

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

$$\therefore 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] < 2.$$

$$\therefore S_n < 2.$$

n ஆனது எல்லையற்று வளர்ந்து செல்லும்போது அத் தொடரீகன் கூட்டுத் தொகை 2 எனும் எல்லையை நெருங்குகிறது.

எனவே,

$$\begin{aligned} \text{எல்லை } S_n &= \text{எல்லை } 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] \\ n \rightarrow \infty & \quad n \rightarrow \infty \\ &= 2 = \text{திட்டமான எண்.} \end{aligned}$$

ஆகையால் அத்தொடர் $x < 1$ என்ற மதிப்பிற்குக் குவிகிறது. எனவே, அத்தொடர் குவி தொடராகும்.

(ii) $x > 1$ அதாவது $x = 2 > 1$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x^n - 1}{x - 1} \\ &= \frac{x^n}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

$$x = 2$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2^n}{2 - 1} - \frac{1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1) \end{aligned}$$

x -ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க S_n -ன் மதிப்பு எந்த ஒரு திட்டமான எண்ணையும்விட அதிகமாகிறது. (1)-ல் n -க்கு வெகுவேறு மதிப்புகளைக் கொடுத்தால்,

$n = 4$ என்கால்,

$$S_4 = 15$$

$n = 5$ என்கால்,

$$S_5 = 31$$

...

...

ஆகையால் விரி தொடரின் வகையையப்படி, n ஆதிக்சித்
அத் தொடரின் மதிப்பு விரித்து $-n$ ஆகவது $+n$ ஆக ஆக
கிறது. எனவே $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$ கத்தழி வறு,
தொடர், $x > 1$ ஆனும், ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $x = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோமானும்

$$S_n = 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (} n \text{ தடவை)} = n$$

$$\therefore \text{எக்ஸ் } S_n = \text{எக்ஸ் } n = n$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

எனவே $x = 1$ என்ற மதிப்பிற்கு அத்தொடர் ஒரு விரித்
தொடராகும்.

(iv) $x = -1$ என்றால்

$$S_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots + (1-1) + 1$$

n ஓர் ஒற்றைப்படை எண்.

$$\therefore \text{எக்ஸ் } S_n = 1$$

$$n \rightarrow \infty$$

n ஒரு இடையிடையடி எண்ணானும்

$$S_n = (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots + (1-1) = 0$$

$$\therefore \text{எக்ஸ் } S_n = 0,$$

$$n \rightarrow \infty$$

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெருக்குத் தொடரின் பொது
விரிதம் $x = 1$ என்றால் அத்தொடர் 0 -க்கும் 1 -க்கும் இடைப்
பட்டு அலைகிறது.

(v) $x < -1$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\text{எக்ஸ் } S_n = -\infty \text{ (} n \text{ இடைப்படைப்படை எண்ணானும்)}$$

$$n \rightarrow \infty \quad = +\infty \text{ (} n \text{ ஒற்றைப்படை எண்ணானும்)}$$

விளக்கம்

$$x = -3 < -1$$

$$\therefore S_n = \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)}$$

n ஓர் ஒத்தற்படையுடைய மூல எண்ணாகில்,

$$S_n = \frac{1+2^n}{1+2}$$

$$\therefore S_n > \frac{2+2n}{4} \quad [\because 2^n = (1+2)^n = 1+n \cdot 2 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 2^2 + \dots + 2^n > 2n]$$

\therefore எக்ஸ் $S_n \rightarrow +\infty$
 $n \rightarrow \infty$

n ஓர் இரட்டையுடைய மூல எண்ணாக இருக்குமானால்,

$$S_n = \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}$$

$$= \frac{1-2^n}{1+2}$$

$$\therefore S_n < -\frac{2n}{4} \quad [\because 2^n > 2n \quad \therefore -2^n < -2n]$$

\therefore எக்ஸ் $S_n \rightarrow -\infty$
 $n \rightarrow \infty$

ஆகையால் (S_n) தொடர் முறையில் $x < -1$ என இருக்கு மாகில் அத்தொடர் $-\infty$ -க்கும், $+\infty$ -க்கும் இடைபட்டு அகலி திறது.

இதைப் பின்வருமாறு தொகுத்து எழுதலாம்:

$1+x+x^2+\dots+x^{n-2}+x^{n-1}+\dots$ கத்தழி வரை என்ற பெருக்குத் தொடரில்,

- (i) $x < 1$ ஆனால் அத் தொடர் குவி தொடராகும்.
- (ii) $x > 1$ ஆனால் அத் தொடர் விரி தொடராகும்.
- (iii) $x < -1$ ஆனால் அத் தொடர் இடைபட்டு அகலிதும்.

3.6. தேற்றம் 1 :

$\sum_{i=1}^{\infty} U_n$ என்ற தொடர் U என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும்,

$\sum_{i=1}^{\infty} V_n$ என்ற தொடர் V என்ற கூட்டுத் தொகைக்கும் குவிபுரளும்

$$(i) \sum_1^{\infty} (u_n + v_n) \text{ என்ற தொடர் } U + V \text{ என்ற கூட்டுத்}$$

தொகைக்குக் குவியும்.

$$(ii) \sum_1^{\infty} (u_n - v_n) \text{ என்ற தொடர் } U - V \text{ என்ற கூட்டுத்}$$

தொகைக்குக் குவியும்.

$$(iii) ku_1 + ku_2 + \dots = k \sum_1^{\infty} u_n \text{ என்ற தொடர் } kU \text{ என்ற}$$

கூட்டுத் தொகைக்குக் குவியும்.

$$(iv) \sum_1^{\infty} \sqrt{u_n v_n} \text{ என்ற தொடர் ஒரு குறி தொடராகும்.}$$

தேர்வு :

$$(i) \sum_1^n u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = U_n$$

$$\sum_1^n v_n = v_1 + v_2 + v_3 \dots v_n = V_n \text{ என்றால்}$$

$$\text{எல்லாம் } U_n = U$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\text{எல்லாம் } V_n = V \text{ ஆகும்.}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$S_n = \sum_1^n (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n)$$

$$\therefore \sum S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

$$= \sum_{n=1}^n u_n + \sum_{n=1}^n v_n$$

$$= U_n + V_n$$

$$\therefore \text{எல்லை } S_n = \text{எல்லை } U_n + \text{எல்லை } V_n \\ n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$S = U + V$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^n (u_n - v_n) &= (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \dots \\ &\quad + (u_n - v_n), \\ &= [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n] \\ &\quad - [v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n] \\ &= U_n - V_n \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = U_n - V_n$$

$$\text{எல்லை } S_n = \text{எல்லை } U_n - \text{எல்லை } V_n \\ n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$S = U - V$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \sum_{i=1}^n k u_n &= k u_1 + k u_2 + k u_3 + \dots + k u_n \\ &= k [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n] \\ &= k U_n \end{aligned}$$

$$S_n = k U_n$$

$$\text{எல்லை } S_n = k \text{ எல்லை } U_n \\ n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$S = k U$$

$$\text{(iv)} \quad \sum_{i=1}^n \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_1 v_1} + \sqrt{u_2 v_2} + \dots + \sqrt{u_n v_n}$$

$$< \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u_n + v_n)$$

$$< \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_n$$

$$\begin{aligned} \text{எல்லை } \sum_{n \rightarrow \infty} \sqrt{u_n v_n} &< \frac{1}{2} \text{ எல்லை } U_n + \frac{1}{2} \text{ எல்லை } V_n \\ &< \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} V \end{aligned}$$

$\sum \sqrt{u_n v_n}$ என்ற தொடர் ஒரு குறி தொடராகும்.

3.7. தேற்றம் 2 :

ஒரு தொடரிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளை நீக்குவதனால் அல்லது சேர்ப்பதனால் அத் தொடரின் குறிதம், வரிதம் அல்லது அலைதம் தன்மை மாறுவதில்லை.

தெரிப்பு :

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \text{ கத்தழி வரை என்ற}$$

தொடரை எடுத்துக் கொள்ளோம்.

அத் தொடரின் p உறுப்புகளை நீக்கவும். அதாவது,

$$S_p = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p \text{ உறுப்புகளை,}$$

$S_{n+p} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p + \dots + u_{n+p}$ -லிருந்து நீக்கினால்,

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_p &= [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p + \dots + u_{n+p}] \\ &\quad - [u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_p] \end{aligned}$$

$$\therefore S_{n+p} - S_p = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n+p}$$

இதை I_n என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$I_n = S_{n+p} - S_p \text{ ஆகும்.}$$

S_n என்பது $\sum_{i=1}^p u_i$ என்ற தொடரின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

அது ஒரு திட்டமான எண்ணாகும்.

$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ என்ற தொடர் S என்ற கூட்டுத் தொகைக்குக் குறியெய்வானும்

$$\begin{aligned} \text{எக்லி } I_n &= \text{எக்லி } (S_{n+p} - S_p) \\ n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \\ &= S - S_p \\ &= \text{ஒரு திட்டமான எண்.} \end{aligned}$$

(I_n) என்ற தொடர் ஒரு குறியெய்வானும்.

அதேபோல் (S_n) என்ற தொடர் விரித்தாலே அல்லது அலைத் தாலே, (I_n)-ல் (S_n)ஐப் போலவே விரியும் அல்லது அலையும்.

ஆகையால் ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்தில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகள் நீக்குவதால் அதன் தன்மை மாறுவதில்லை.

3.8 எச்சம் (Remainder)

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = a_1 + \dots$ என்ற கத்தழித் தொடரில் ஐதல் ($n + m$) உறுப்புகள் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$S_{n+m} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots + a_{n+m}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{n+m} - S_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}) \\ &\quad - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \\ &= a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+m} \\ &= R_n \text{ என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.} \end{aligned}$$

இதுவே பகுதி எச்சம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$m = 1$ ஆனால்,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}) \\ &\quad - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \\ &= a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore R_n = a_{n+1}$$

3.9 தேற்றம் 3 :

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i \text{ என்ற குணி தொடரில்,}$$

$$\text{எவ்வித } {}^n R_n = 0, \\ n \rightarrow \infty$$

தெரிப்பு :

$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ கத்தழி வரை என்ற குணி தொடரில் S என்பது ஒரு நிப்டமான எண்ணாகும். ஏதாவதான சிறிய எண் ϵ கொடுக்கப்பட்டால் $n > N$ என்ற மதிப்புக்கு $|S_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$ எனப் பொருத்தும்.

$n + m > N$ என்பதால்

$$\begin{aligned} |S_{n+m} - S| &< \frac{\epsilon}{2} \\ |{}^n R_n| &= |S_{n+m} - S_n| \\ &= |S_{n+m} - S + S - S_n| \\ &< |S_{n+m} - S| + |S - S_n| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore {}^n R_n < \epsilon$$

$$\therefore \text{எவ்வித } {}^n R_n = 0, \\ n \rightarrow \infty$$

$$m = 1 \text{ என்றால் எவ்வித } {}^1 R_n = 0, \\ n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{எவ்வித } u_{n+1} = 0, \\ n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{எவ்வித } u_n = 0, \\ n \rightarrow \infty$$

ஆகையால் ஒரு கத்தழித் தொடர் குணியுமானால் அதன் n ஆவது உறுப்பு, n கத்தழி எவ்விதவைய அடைவம்போது, 0 எவ்விதவைய ஆணாகும்.

குறிப்பு :

n -ன் எல்லாக் கூட்டு முழு எண் மதிப்புகளுக்கும் $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ என்ற

தொடர் குவிபுமானால், எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவை

யான, பொதுமான கட்டுப்பாடாகும். தேவைவரானது என்பது தேற்றத்தில் நிரூபிக்கப்பட்டது. பொதுமான கட்டுப்பாடு என்பது இப்பாடத்திட்டத்திற்கு அப்பாற்பட்டது.

எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவைவரானது. அதாவது $n \rightarrow \infty$

ஒரு தொடர், குவி தொடரானால் எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ என்பது தேவை.

எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \neq 0$ என்றால் அத் தொடர் குவியவில்லை என்று நினை

விக்கலாம்.

ஆனால் மறுதலியாக எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ என்றால் அத்தொடர்

குவியலாம் அல்லது குவியாமல் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ கத்தழி வரை என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்

$$n \text{ ஆவது உறுப்பு } = \frac{1}{n}.$$

$$u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

எனவே நாம் அத் தொடர் குவியிறது என்று சொல்லிவிட முடியாது. ஏனெனில் அத்தொடர் ஒரு விரி தொடர் ஆகும்.

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \infty$$

$$nR_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$nR_n > \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{n+n}$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

\therefore எக்லை $nR_n \neq 0$,
 $n \rightarrow \infty$

ஆகையால் எக்லை $n_n = 0$ என்றாலும், எக்லை $nR_n \neq 0$ ஆக
 $n \rightarrow \infty$

படியால் அத்தொடர் குவி தொடராகவில்லை.

எனவே, ஒரு தொடர் குவி தொடராக எக்லை $nR_n = 0$
 $n \rightarrow \infty$

என்பது ஒரு தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடு, எக்லை $n_n = 0$
 $n \rightarrow \infty$

என்பது தேவையான கட்டும் கட்டுப்பாடாகும்.

ஒவ்வொரு n க்கும் $n_n > 0$ என்போம்.

(i) (S_n) என்ற தொடர் முறை மேல் வரம்பு உடையதாக இருக்குமானால் அத்தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) (S_n) என்ற தொடர் முறை மேல் வரம்பு இல்லாது இருக்குமானால் அத்தொடர் ஒரு விசி தொடராகும்.

ஒரு கத்தழித் தொடரின் தன்மையை (குவிதல் அல்லது விசிதல்) சில சோதனை முறைகளைக் கொண்டு ஆராய்ந்து அறியலாம். சிலவரும் சோதனைகளில் எடுத்துக் கொள்ளும் தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டிடல்கள் என்று தாம் எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

3-10. சோதனை 1 :

ஒப்பீட்டுச் சோதனை (Comparison test)

n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $\frac{n_n}{r_n} < k$ என்ற ஒரு திட்டமான கூட்டு முழு எண் ஆனால், $\sum r_n$ ஒரு குவி தொடராகும்; $\sum n_n$ -ம் ஒரு குவி தொடராகும்

தெரிப்பு :

$$\frac{u_1}{r_1} \leq k \text{ (கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.)}$$

$$\therefore u_1 \leq k r_1$$

அதேபோல $u_2 \leq k r_2$

$$u_3 \leq k r_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n \leq k r_n$$

$$\therefore u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq k(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n)$$

$$\therefore U_1 \leq k V_n$$

$$\sum_1^n u_n = U_n \text{ எனவும், } \sum_1^n r_n = V_n \text{ எனவும் கொள்க.}$$

$$\sum_1^\infty u_n = U \text{ எனவும், } \sum_1^\infty V_n = V \text{ எனவும் எடுத்துக்கொள்}$$

கொள்க. $U_n \leq k V_n$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் எல்லா $V_n = V$,
 $n \rightarrow 1$

$\sum_1^n r_n$ என்பது ஒரு குறி தொடரின் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்

தொகை. எனவே n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் அது ஒரு மேல் வரம்புடைய எண்ணாகும்.

அதாவது (U_n) என்ற ஒரீயல்பான ஏழம் தொடர்முறை மேல் வரம்புடையதாக இருப்பதால் (U_n) ஒரு குறி தொடராகும்.

$$\therefore \sum_1^\infty u_n \text{ என்பது ஒரு குறிதொடராகும்.}$$

3-10. 1 கொள்க கோதனை :

எக்ஸ் $\frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ என்ற ஒரு திட்டமான எக்ஸ் இருக்கு
மரவின் $\exists u_n$ -ம், v_n -ம் ஒருங்கே குளியும்.

தெரியு :

எக்ஸ் $\frac{u_n}{v_n} = k \ (k \neq 0)$ என இருக்கட்டும்.

எனவே எக்ஸ் வரையறைப்படி ϵ என்ற எக்வளவு சிறிய
கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும் $n > n$ என்ற மதிப்புகளை
கொப்ப,

$$\frac{u_n}{v_n}, \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}, \frac{u_{n+2}}{v_{n+2}}, \dots \dots \text{என்ற மதிப்புகள்}$$

$(k - \epsilon, k + \epsilon)$ என்ற இடைவெளிக்கு இடைவே அமையும்.

$$\therefore u_n < v_n (k + \epsilon), (n > n)$$

$\exists v_n$ ஒரு குளி தொடர். $\therefore \exists v_n$ -ம் ஒரு குளி தொடராகும்.

3-11. கோதனை 2:

n -ன் எக்வளவு மதிப்புகளுக்கும் $\frac{u_n}{v_n} > k$ ஒரு திட்டமான கூட்டு
எண் கூடு இருந்தால், $\exists v_n$ என்ற தொடர் விரி தொடராகும்,
 $\exists u_n$ -ம் விரி தொடராகும்.

தெரியு :

$$\frac{u_n}{v_n} > k, \text{ கொடுக்கப்பட்டது.}$$

$$\therefore \frac{u_1}{v_1} > k$$

$$\therefore u_1 > k v_1$$

அதேபோல $u_2 > k v_2$

$$u_3 > k v_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n > k v_n$$

$$\therefore u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \geq k (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \geq k \sum_{i=1}^n v_i.$$

$$\sum_{i=1}^n u_i = U_n \text{ எனவும், } \sum_{i=1}^n v_i = V_n \text{ எனவும் எடுத்துக்}$$

கொள்ளலாமானால்,

$$U_n \geq k V_n, \quad \forall v_n \text{ ஒரு வரி தொடர்}$$

$$\therefore \text{எல்லை } V_n = \infty.$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\text{எனவே, எல்லை } U_n = \infty.$$

$$n \rightarrow \infty$$

எனவே, $\sum u_n$ என்பது ஒரு வரி தொடராகும்.

3.11.1 விலைச் சோதனை :

$$\sum V_n \text{ ஒரு வரி தொடர்.}$$

$$\text{எல்லை } \frac{u_n}{v_n} = k (k \neq 0) \text{ என்ற ஒரு திட்டமான எல்லை இருக்கு}$$

$$n \rightarrow \infty$$

யாவின் $\sum u_n$ -ம் வரிவரும்.

தெரிப்பு :

$$\text{எல்லை } \frac{u_n}{v_n} = k (k \neq 0) \text{ என்று இருக்கட்டும்,}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\therefore \text{எல்லை வளரவதைப்படி, } n > m \text{ என்ற மதிப்புதனாக}$$

$$\text{கொள்வ } k - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < k + \epsilon \text{ என்று அமைவுப்படி, } \epsilon \text{ என்ற மிகச்}$$

சிறிய கூட்டெண்ணும், m என்ற ஒரு கூட்டு முழு எண்ணும் காணலாம்.

$$\therefore \frac{u_n}{v_n} > n - \epsilon$$

$$\therefore u_n > (k - \epsilon) v_n (n > m).$$

$$\sum v_n \text{ ஒரு வரி தொடர்.} \quad \therefore \sum u_n \text{-ம் வரி தொடராகும்.}$$

குறிப்பு:

மேற்கூறிய சோதனைகளில் $k = 1$ என்று கொண்டோமானால் அச் சோதனைகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

(i) $0 < v_1 < v_2$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\sum v_2$ என்ற தொடர் ஒரு குறித் தொடரானால் $\sum v_1$ -ம் ஒரு குறித் தொடராகும்.

(ii) $v_1 > v_2 > 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $\sum v_1$ என்பது ஒரு குறித் தொடரானால் $\sum v_2$ -ம் ஒரு குறித் தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$1 + \frac{4}{2} + \frac{4^2}{8} + \frac{4^3}{4} + \dots$ கத்தழி வரை என்ற தொடரின் குறிதல் விரிதல் தன்மையைக் காண்க.

$$1 + \frac{4}{2} + \frac{4^2}{8} + \frac{4^3}{4} + \frac{4^4}{16} + \dots \text{ கத்தழி வரை.}$$

$$u_1 = \frac{4^1}{2} = \frac{4^1}{2 \cdot 1 \cdot 2} < \frac{4^1}{5 \cdot 1 \cdot 2} = v_1 \text{ என்க.} \quad \dots (1)$$

$$u_2 = \frac{4^2}{8} = \frac{4^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} < \frac{4^2}{5^2 \cdot 2} = v_2 \text{ என்க.} \quad \dots (2)$$

$$u_3 = \frac{4^3}{4} = \frac{4^3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} < \frac{4^3}{5^3 \cdot 2} = v_3 \text{ என்க.} \quad \dots (3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரை $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \infty$ என்ற எடுத்துக் கொண்டோமானால்,

$$1 + \frac{4}{2} + \frac{4^2}{8} + \frac{4^3}{4} + \dots \text{ கத்தழி வரை} \\ = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \text{ கத்தழி வரை}$$

என்ற தொடரில் $u_n = \frac{4^{n-1}}{n}$; n -க்கு $1, 2, 3, \dots$ என்ற மதிப்புகளைக்

கொடுத்தால் அத் தொடரின் உறுப்புகளைக் காணலாம்.

$$\therefore \sum_1^{\infty} v_n = 1 + \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{4^2}{\frac{1}{3}} + \frac{4^3}{\frac{1}{4}} + \frac{4^4}{\frac{1}{5}} + \dots$$

... கத்தழி வரை,

$$\sum_1^{\infty} v_n = 1 + \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{4^2}{\frac{1}{3}} + \frac{4^3}{\frac{1}{4}} + \frac{4^4}{\frac{1}{5}} + \frac{4^5}{5 \cdot \frac{1}{5}} + \frac{4^6}{5^2 \cdot \frac{1}{5}} + \dots \text{ கத்தழி வரை}$$

என்ற தொடர்களை அமைப்போம்.

இவ்விரண்டு தொடர்களின் உறுப்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2$$

$$u_3 = v_3$$

$$u_4 = v_4$$

$$u_5 = v_5 \quad [(1), (2), (3) \dots \dots \text{ இவைகளின் மூலம்}]$$

$$u_6 < v_6$$

$$u_7 < v_7$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\therefore \sum_1^{\infty} u_n < \sum_1^{\infty} v_n \text{ ஆகும்.} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (A)$$

$$\sum_1^{\infty} v_n = 1 + \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{4^2}{\frac{1}{3}} + \frac{4^3}{\frac{1}{4}} + \frac{4^4}{\frac{1}{5}} + \frac{4^5}{5 \cdot \frac{1}{5}} + \frac{4^6}{5^2 \cdot \frac{1}{5}} + \dots \dots \text{ கத்தழிவரை.}$$

$$\left[1 + \frac{4}{\frac{1}{2}} + \frac{4^2}{\frac{1}{3}} + \frac{4^3}{\frac{1}{4}} + \frac{4^4}{\frac{1}{5}} \right] + \frac{4^5}{5 \cdot \frac{1}{5}} \left[1 + \frac{4}{5} + \frac{4^2}{5^2} + \text{கத்தழி வரை.} \right]$$

$\therefore \sum_1^{\infty} r_n = [\text{ஒரு திட்டமான எண்}] + \frac{4^4}{8 \cdot 6} [\text{ஒரு பெருக் குத் தொடர்}]$

இப் பெருக்குத் தொடரின் பொது விகிதம் $x = \frac{4}{5} < 1$ என்பதால் அத்தொடர் குவிக்கிறது.

எனவே $\sum r_n$ என்ற தொடர் குவிக்கிறது. ஆகையால் (4)-க் மூலம் (μ_n) என்ற தொடர் மூன்றாவிக் அத்தொடர் மேல் வரம்பை உடையதாகவுள்ளது. எனவே $\sum \mu_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\sum_1^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ என்ற தொடரின் குவிதல், விரிதல் தன்மையை ஆராய்க.

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^3} + \dots + \frac{1}{1+x^n} + \dots$$

கத்தழி வரை என்ற தொடரில் $\mu_n = \frac{1}{1+x^n}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots$$

கத்தழி வரை என்ற தொடரில் $v_n = \frac{1}{x^n}$.

$$\frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{x^n}$$

$$\therefore \mu_n < v_n$$

$$\therefore \mu_1 < v_1$$

$$\mu_2 < v_2$$

$$\mu_3 < v_3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mu_n < v_n$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n < v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

$$2u_n < 2v_n$$

$$2v_n = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \text{ என்ற தொடர். இது ஒரு பெருக்கும்}$$

தொடர். இதன் பொது விகிதம் $\frac{1}{x}$ என்கும் இத்தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

$\therefore x > 1$ என்ற மதிப்பிற்கு $2u_n$ குவி தொடராகும்.

$$x = 1 \text{ என்றும், } u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}.$$

$$\therefore U_n = n \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\text{எல்லா } n \rightarrow \infty \quad U_n = \infty.$$

$\therefore 2u_n$ என்ற தொடர் $x = 1$ என்ற மதிப்பிற்கு விசி தொடராகும்.

$0 < x < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு,

$$\begin{aligned} \text{எல்லா } n \rightarrow \infty \quad u_n &= \text{எல்லா } n \rightarrow \infty \quad \frac{1}{1+x^n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

எல்லா $u_n \neq 0$ ஆனபடியால் $2u_n$ ஒரு விசி தொடராகும். $n \rightarrow \infty$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \dots \\ = \dots \text{சத்தழி வரை} \end{aligned}$$

இத்தொடரின் குவிதம் விரிதம் தன்மையை ஆராய்க.

$$\sum_1^n u_n = \sum_1^n \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} < \frac{1}{(2n)} - \frac{1}{(2n+2)}$$

$$\therefore u_n < \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \cdot v_n \quad \therefore \sum u_n < \frac{1}{4} \sum v_n$$

$\sum v_n = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n^2}$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும். ஆகையால் $\sum u_n$ -ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\sum \sqrt{\frac{8^n + 1}{8^n + 2}}$ என்ற கத்தழித் தொடரின் குவிதல் இயிதல் தன்மைவைக் காண்க.

$$\sum_1^{\infty} u_n = \sum_1^{\infty} \sqrt{\frac{8^n + 1}{8^n + 2}}$$

$$\therefore u_n = \sqrt{\frac{8^n + 1}{8^n + 2}}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{8^n}{8^n}} \text{ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{v_n} &= \sqrt{\frac{8^n + 1}{8^n + 2}} \div \sqrt{\frac{8^n}{8^n}} \\ &= \sqrt{\frac{(8^n + 1) \times 8^n}{(8^n + 2) \times 8^n}} = \sqrt{\frac{8^n \left(1 + \frac{1}{8^n}\right) \times 8^n}{8^n \left(1 + \frac{2}{8^n}\right) \times 8^n}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8^n}}{1 + \frac{2}{8^n}}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{எனவே} & \frac{u_n}{v_n} & = \quad \text{எனவே} \\ n \rightarrow \infty & & n \rightarrow \infty \end{array} \quad \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8^n}}{1 + \frac{2}{8^n}}} = 1.$$

எனவே இரண்டு தொடகைகளும் ஒருக்கே குவிவும் அம்மை விசிவும்.

$V = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n + \dots$ சத்திரி வரை.

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} r_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2^i}{8^i}} \text{ என்ற தொடகை ஒரு}$$

பெருக்குத் தொடகை. அதன் பொது விசிதம் $\sqrt{\frac{2}{8}} < 1$

ஆகையால் $\sum r_i$ ஒரு குவி தொடகை ஆகும். $\sum u_n$ -ம் ஒரு குவி தொடகை.

3.12. தேற்றம்:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{p^p} + \dots \text{ சத்திரி வரை,}$$

என்ற தொடகை, (i) $p > 1$ ஆனால் அத்தொடகை குவிவும்.

(ii) $p < 1$ ஆனால் அத்தொடகை விசிவும்.

(i) $p > 1$ எனக் கொள்வோம்.

$$8^p > 2^p$$

$$\therefore \frac{1}{8^p} < \frac{1}{2^p}$$

$$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}$$

$$\therefore \frac{1}{2^p} + \frac{1}{8^p} < \frac{2}{2^p}$$

அதே போல்,

$$5^p > 4^p \quad \therefore \frac{1}{5^p} < \frac{1}{4^p}$$

$$6^p > 4^p \quad \therefore \frac{1}{6^p} < \frac{1}{4^p}$$

$$7^p > 4^p \quad \therefore \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} &< \frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} \\ &+ \frac{1}{4^p} + \frac{1}{8^p}, \\ &= \frac{4}{4^p} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{4}{4^p}$$

$$\text{ஆதே போல் } \frac{1}{6^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{10^p} + \dots + \frac{1}{16^p} < \frac{5}{8^p}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

\therefore கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^p} + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{7^p} \right] \\ + \left[\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \dots + \frac{1}{16^p} \right] + \dots \\ \dots \text{ சுத்தழி வரை} \\ < \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{5}{8^p} + \dots \end{aligned}$$

என்ற சுத்தழித் தொடர் ஒரு பெருக்குத் தொடராகும். இத் தொடரின் பொது விகிதம் $\frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ எனின் $p > 1$.

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் பொதுவிகிதம் < 1 ஆக இருக்குமானால் அப் பெருக்குத் தொடர் ஒரு குவித் தொடர் என்பது நமக்குத் தெரியும். ஆகையால் நமக்குத் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் ஒர் வேர் அடைப்புகளிலும் உள்ள உறுப்புகள், பெருக்குத் தொடரின் உறுப்புகளினிடக் குறைவாக இருப்பதாலும் பெருக்குத் தொடர் ஒரு குவி தொடராக இருப்பதாலும் கொடுக்கப்பட்ட தொடரும் ஒரு குவி தொடராகும். $p > 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவித் தொடராகிறது.

(ii) $p = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$3 < 4 \quad \therefore \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{8} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$6 < 8 \quad \therefore \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$$

$$6 < 8 \quad \therefore \frac{1}{6} > \frac{1}{8}$$

$$7 < 8 \quad \therefore \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{அதேபோல் } \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) \\ + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{18} \right) + \dots \dots \text{கத்தழிவரை}$$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \dots$ கத்தழிவரை என்ற தொடர் ஒரு விரி தொடராகும். ஆகையால் $p=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்குக் கொடுக்கப்பட்ட தொடரும் விரி தொடராகும். ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் உறுப்புகள் தாம் பெறும் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \dots$ என்ற விரி தொடரின் உறுப்புகளை விடப் பெரிதவதாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $p=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $p < 1$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்

$$2^p < 2$$

$$\therefore \frac{1}{2^p} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p}$$

$$\frac{1}{4^p} > \frac{1}{4^p}$$

... ..

... ..

$$\therefore \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \text{ கத்தறி வரை}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ என்ற கத்தறித்}$$

தொடர் ஒரு விரி தொடர் என்பதை இரண்டாம் பிரிவில் $p=1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் பார்த்தோம்.

ஆகையால் $p < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \text{ என்ற கத்தறித் தொடர் ஒரு}$$

விரி தொடராகும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பெறப்பட்ட $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$ என்ற கத்தறி, விரி தொடரில் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் விடப் பெரியதாக இருப்பதால், கொடுக்கப்பட்ட, தொடரும் விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$2(\sqrt{n^2+1}-n)$ என்ற தொடர் குவி தொடராக அல்லது விரி தொடராக என்று அறிக.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2+1} - n \\ &= \frac{[\sqrt{n^2+1} - n][\sqrt{n^2+1} + n]}{[\sqrt{n^2+1} + n]} \\ &= \frac{(n^2+1) - (n^2)}{[\sqrt{n^2+1} + n]} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \end{aligned}$$

$$v_n = \frac{1}{2n} \text{ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{[\sqrt{n^2+1} + n]} < \frac{1}{2n}$$

$$= \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + 1} \right] \times 2n$$

$$= \left[\sqrt{1 + \frac{2}{n^2} + 1} \right]$$

எதிலு $\frac{u_n}{v_n} = \frac{எதிலு}{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + 1}} = 1.$

எனலு, $\sum u_n$ -ம் $\sum v_n$ -ம் ஒருங்கே குவிவும் ஆவலது விரிவும்.

ஆனா, $\sum v_n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots \dots \right]$

என்ற கத்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடர். ஏனெனில் கோதனை 8-ல் இரண்டாம் பிரிவுப்படி $p=1$ ஆகையால் அத்தொடர் விரி தொடர். எனலு, $\sum u_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$u_n = \frac{n^2 + 8n + 1}{n^3 (n+1)^3}$ என்கும் $\sum u_n$ குவி தொடரா ஆவலது விரி தொடரா ?

$$u_n = \frac{n^2 + 8n + 1}{n^3 (n+1)^3}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{என்று எடுத்துக் கொண்டால்,}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2 + 8n + 1}{n^3 (n+1)^3} \div \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 \times n^2} \times n^2$$

$$= \frac{1 + \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^3}$$

$$\begin{aligned} \text{எவ்வாறு } u_n &= \text{எவ்வாறு } \frac{1 + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \\ n \rightarrow \infty \quad v_n &= 1. \end{aligned}$$

ஆகையால் $\sum v_n$ -ம் $\sum v_n$ -ம், ஒருங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ கத்தழி வரை. இத் தொடரில் $p > 1$ ஆகையால் $\sum v_n$ ஒரு குவி தொடராகும். ஆகையால் $\sum v_n$ -ம் ஒரு குவி-தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\sum \frac{1}{x^2 + n^2}$ என்ற தொடர் குவி தொடராக அல்லது விரி தொடராக என்று ஆதிக.

$$\sum v_n = \sum \frac{1}{x^2 + n^2}$$

$$\therefore u_n = \frac{1}{x^2 + n^2}.$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} \text{ என்று எடுத்துக் கொண்டால்}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{v_n} &= \frac{1}{x^2 + n^2} \div \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n^2}{x^2 + n^2} = \frac{n^2}{n^2 \left[\frac{x^2}{n^2} + 1 \right]} \\ &= \left[\frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எவ்வாறு } \frac{u_n}{v_n} &= \text{எவ்வாறு } \left[\frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right], \text{ இங்கு } x \text{ ஒரு திட்டமான எண்.} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ஆகையால் $\sum v_n$ -ம், $\sum v_n$ -ம் ஒரூங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\sum v_n = \sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடரின் சோதனை 8 ஆம் $p > 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு $\sum v_n$ ஒரு குவி தொடராகும். ஆகையால் $\sum v_n$ -ம் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \quad \text{என்ற தொடரின் குவி தன்மை அல்லது}$$

விரி தன்மையை ஆறிக.

$$u_n = \frac{1}{2n-1}$$

$$v_n = \frac{1}{2n} \quad \text{எங்கும்}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{v_n} &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n-1} \times \frac{2n}{2n} = \frac{2n}{2n \left(1 - \frac{1}{2n} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n \left(1 - \frac{1}{2n} \right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

எனவே u_n -ம், v_n -ம் ஒரூங்கே குவியும் அல்லது விரியும்.

$\sum v_n = \sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n}$ என்ற கத்தழித் தொடர் ஒரு விரி தொடராகும். ($p=1$) ஆகையால் $\sum u_n$ -ம் விரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

n, m கூட்டுஎண்களானால் $\frac{1}{x+1} + \frac{m}{x+m} + \frac{m^2}{x+m^2} + \dots$ என்ற கத்தழித் தொடரின் தன்மையை ஆறிக.

$$(i) \quad u_n + \frac{m^2}{x+m^2} < \frac{m^2}{x} = v_n$$

∴ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$ என்பது ஒரு கெடுக்குத் தொடர். அதன் பெறுகிறதும் ∞ . ஆகையால் $m < 1$ என்றால் $\sum v_n$ குறியும் எனவே $\sum v_n$ -ம் $m < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் குறியும்.

(ii) $m = 1$ என்றால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$\sum v_n = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \dots$$

கத்தழிவரை ஒரு விரி தொடர். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

(iii) $m > 1$ என்றால்

$$\begin{aligned} \frac{m^2}{x+m^2} - \frac{1}{x+1} &= \frac{xm^2 + m^2 - x - m}{(x+m^2)(x+1)} \\ &= \frac{x(m^2-1)}{(x+m^2)(x+1)} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{m^2}{x+m^2} - \frac{1}{x+1} > 0$$

$$\therefore \frac{m^2}{x+m^2} > \frac{1}{x+1}$$

$$\text{அதாவது, } v_n > \frac{1}{x+1}$$

$\sum v_n > \sum \frac{1}{x+1}$ என்பது ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum v_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

பயிற்சி 3 (a)

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கத்தழித் தொடர்களின் குறி / விரி / அல்லாதன்மையை ஆராய் :

$$1. \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \dots$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \dots$$

$$3. \sum \frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$4. \sum \frac{\sqrt{-1} + 4^n}{\sqrt{-1} + 6^n}$$

$$5. \sum_1^{\infty} \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$$

$$6. \sum \frac{2n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

$$7. \sum \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$8. \sum -\frac{n^{\frac{2}{3}}}{1+n^{\frac{5}{3}}}$$

$$9. \sum \frac{n^2 + 8}{n^3 + 2}$$

$$10. \sum \frac{n^2 - 1}{\sqrt[3]{n^{12} + 12}}$$

$$11. \sum \sqrt{\frac{2n^3 + 9}{5n^3 + 7}}$$

$$12. \sum \frac{2^n - 1}{8^{2n} + 1}$$

$$13. \sum_1^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

$$14. \sum \frac{n}{n^3 - 1}$$

$$15. \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 + 3^n n^2}$$

$$16. \sum \sqrt[3]{\frac{8n+4}{4n+3}}$$

$$17. \sum \sqrt{\frac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{5^n - 2^{n+1}}}$$

$$18. \sum \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{n^2}$$

$$19. \sum \frac{1}{(1+n)^p (2+n)^q}$$

$$20. \frac{1^2}{2^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 4^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3} + \dots$$

$$21. \sum \frac{1}{1+nx}$$

$$22. \sum \frac{n^n}{(n+1)^{n+2}}$$

$$23. \sum \frac{x^n}{1+x^n} \quad (x > 0)$$

$$24. \sum \frac{(2n-1)(2^n)}{(2n+1)^2(2n+2)^2}$$

$$25. \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

3.13. விதே கோதீஸ் 4 :

(i) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ஆனால், $\exists u_n$ ஒரு குறி தொடராகும் $\exists v_n$ -ம் ஒரு குறி தொடராகும்.

(ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ஆனால், $\exists v_n$ ஒரு விரி தொடராகும் $\exists u_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

(i) U_n என்பது $2u_n$ -ல் n உறுப்புகளில் கூட்டுத் தொகை

$$\begin{aligned} \therefore U_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \dots + \frac{u_n}{u_1} \right] \\ &= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2 u_1} + \frac{u_2}{u_1} + \dots \right] \\ \therefore U_n &\leq u_1 \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_1} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_2} + \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_3}{v_1} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] \end{aligned}$$

$$U_n \leq \frac{u_1}{v_1} [v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n]$$

$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ என்பது ஒரு திட்டமான எண்.

$$\therefore U_n \leq \frac{u_1}{v_1} V_n.$$

$$\therefore 2u_n \leq \frac{u_1}{v_1} 2v_n.$$

$\frac{u_1}{v_1} =$ ஒரு திட்டமான எண். $2v_n$ ஒரு குறி தொடராகும்.

ஆகையால் (U_n) என்ற ஒலிப்பான ஏறும் தொடர் மூன்ற மேல் வரம்புடையது எனவே $2u_n$ ஒரு குறி தொடராகும்.

(ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}$ என்றும், n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\frac{u_2}{u_1} > \frac{v_2}{v_1}, \frac{u_3}{u_2} > \frac{v_3}{v_2}, \dots$$

$$\begin{aligned} U_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_1} + \dots + \frac{u_n}{u_1} \right] \\ &= u_1 \left[1 + \frac{u_2}{u_1} + \frac{u_3}{u_2} + \frac{u_2}{u_1} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$U_n > u_1 \left[1 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} + \dots \dots \right]$$

$$U_n > \frac{u_1}{r_1} [r_1 + r_2 + r_2 + \dots + r_n]$$

$$\therefore U_n > \frac{u_1}{r_1} r_n.$$

அதாவது,

$$\sum_1^n u_n > \frac{u_1}{r_1} \sum_1^n r_n.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_1^n u_n \right) = \infty < \frac{u_1}{r_1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n r_n = \infty$$

(ஏனெனில் $\sum r_n$ ஒரு விரி தொடர்). ஆகையால் $\sum u_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

3-14. கோதின் 5 :

1. ஆகம்பரின் விகித கோதின் (D' Alembert's Ratio Test)

ஒரு தொடரின் ஆகம்பத்திலிருந்தோ அல்லது குறிப்பிட்ட உறுப்புகளுக்கும் இடையே $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1$ என்ற கட்டுப்பாடு அந்த தொடருக்கும் பொருத்துவதால் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1 \text{ என்று கொடுக்கப்பட்டது.}$$

$\sum u_n$ என்ற கத்தழித் தொடரில் r ஆவது உறுப்பிலிருந்து கொடுபட்ட சமனின் மைக் கட்டுப்பாடு பொருத்துவதால்,

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} < k \quad \therefore u_{r+1} < k u_r$$

$$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} < k \quad \therefore u_{r+2} < k u_{r+1} < k \cdot k u_r$$

$$\therefore u_{r+3} < k^2 u_r$$

$$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} < k \quad \therefore u_{r+2} < k u_{r+1} < k \cdot k^2 u_r$$

$$\therefore u_{r+2} < k^3 u_r$$

$$\dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots$$

$$\therefore u_r + u_{r+1} + u_{r+2} \dots \infty < u_r + k u_r + k^2 u_r + \dots \infty$$

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} \dots \infty < u_r [1 + k + k^2 + \dots \infty]$$

$$\therefore u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots \infty < \frac{u_r}{1-k}$$

ஏனெனில் $1 + k + k^2 + k^3 \dots \infty$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் பொது விரிதம் $k < 1$. ஆகையால் அதன் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{1-k}$

$$\therefore u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots \infty < \frac{u_r}{1-k}$$

7 ஆவது உறுப்பு வரை அத்தொடரின் கூட்டுத்தொகை ஒரு திட்டமான எண்ணாகும். ஒரு தொடரில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை உள்ள உறுப்புகளை நீக்குவதால் அத்தொடரின் தன்மை மாறா திரும்.

எனவே $\sum u_n$ -ன் கூட்டுத்தொகை திட்டமான எண்ணாக வால் $\sum u_n$ ஒரு குறி தொடராகும்.

3.14.1 விரிதச் சோதனை :

எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k < 1$ எனில் $\sum u_n$ ஒரு குறிதொடராகும்.

தெரிப்பு :

எல்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது).

‘எல்லை’ வரையறைப்படி $n > n$ என்ற மதிப்புகொப்ப, ϵ என்ற எவ்வளவு மிகச் சிறிய கூட்டுடன் கொடுக்கப்பட்டாலும்,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \epsilon$ என்ற சமனின்மை பொருத்ததும்படி, n என்ற ஒரு கூட்டு மூலு எண் காண முடியும்,

$$k < 1 \quad \therefore \quad k + \epsilon < 1, \quad (\because \epsilon \text{ மிக மிகச் சிறிய கூட்டெண்})$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \epsilon < 1, \quad \therefore \quad \exists u_n \text{ ஒரு விதி தொடராகும்.}$$

3.15. சோதனை 6 :

ஒரு தொடரின் ஆரம்பத்திலிருந்தோ அல்லது குறிப்பிட்ட உறுப்புகளுக்கும் பின்போ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ என்ற சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு பொருத்து}$$

மையின் $\exists u_n$ ஒரு விதி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

(i) r ஆவது உறுப்பிலிருந்து அத்தொடரின் எல்லா உறுப்புகளும் சமமாக இருப்பின்,

$$u_r = u_{r+1} = u_{r+2} = \dots = u_{n+r} \text{ ஆனால்}$$

$$\therefore \quad u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \dots + u_{n+r} = R \cdot u_r$$

$$\therefore \quad \begin{array}{l} \text{எல்லா} \\ n \rightarrow \infty \quad [u_{r+1} + u_{r+2} + \dots + u_{n+r}] = \text{எல்லா} \\ \qquad \qquad \qquad n \rightarrow \infty \quad r \cdot u_r \\ \qquad \qquad \qquad = \infty \end{array}$$

$$\therefore \quad \exists u_n \text{ ஒரு விதி தொடராகும்.}$$

(ii) r ஆவது உறுப்பிலிருந்து பின்பு $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ என்ற சமனின்மைக் கட்டுப்பாடு பொருத்ததமாயின்,

$$\frac{u_{r+1}}{u_r} > 1 \quad \therefore \quad u_{r+1} > u_r$$

$$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}} > 1 \quad \therefore \quad u_{r+2} > u_{r+1} > u_r$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} \cdot x^{n-1} \text{ என்ற தொடரின் குவிதல்,}$$

விசரிதல் தரிசுமையை ஆரிக.

(செ. ப. க. ஏ. 91)

$$u_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \cdot x^{n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1} \cdot x^n$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1} \cdot x^n \div \frac{n^2}{n^2 + 1} \cdot x^{n-1}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} \cdot x$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} \cdot x$$

$$\therefore \text{எக்ஸு } \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$= \text{எக்ஸு } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} \cdot x$$

$$= x.$$

டிஆலம்பரீஸ் சோதனைகள் படி,

$x < 1$ ஆனால் தொடர் குவி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனால் தொடர் விசி தொடராகும்.

$x = 1$ என்றால் இச்சோதனை பயன்படாது.

எனவே,

$$u_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \text{ ஆனால்,}$$

$$v_n = \frac{1}{n} \text{ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்.}$$

$$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2}{n^2 + 1} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{n^2}{n^2 + 1} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)$$

எல்லா $\frac{u_n}{v_n} = 1$
 $n \rightarrow \infty$

ஆகையால் $\sum u_n$ -ம் $\sum v_n$ -ம் ஒரேயே குறியில் அல்லது விரியும்.

$$\sum v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \infty.$$

சேதமே \sum -ன் படி $\sum v_n$ ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum u_n$ -ய் ஒரு விரி தொடராகும். எனவே, $x = 1$ ஆனால் கொடுக்கப் பட்ட தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

அத் தொடரின் தன்மையை ஒன்று சேர்த்து எழுதுவோ மானும்,

$x < 1$ ஆனால் தொடர் குறியில்.

$x > 1$ ஆனால் தொடர் விரியும்.

$x = 1$ ஆனால் தொடர் விரியும்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) x^n \text{ என்ற தொடர் குறி தொடர் அல்லது}$$

விரி தொடர் எனக் காண்க.

$$u_n = [\sqrt{n^2 + 1} - n] x^n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} x^n$$

$$u_{n+1} = [\sqrt{(n+1)^2 + 1} - (n+1)] x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + (n+1)} x^{n+1}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} (n+1)} \cdot x$$

$$= \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right]}{\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]} x$$

$$\text{எல்லா } n \rightarrow \infty \text{ க்கு } \frac{u_{n+1}}{u_n} = x.$$

$\therefore \sum_1^{\infty} u_n$ என்ற தொடர் $x < 1$ ஆனால் குறி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனால் விரி தொடராகும்.

$x = 1$ ஆனால் n ஆவம்பரிக்

சோதனை பயன்படுவதில்லை. எனவே

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \text{ ஆனால்}$$

$$v_n = -\frac{1}{n} \text{ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

$$\text{எல்லா } n \rightarrow \infty \text{ க்கு } \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \sum_1^{\infty} u_n$ -ம் $\sum_1^{\infty} v_n$ -ம் ஒரேயே குறியும் அல்லது விரியும்.

$$\sum_1^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \infty \text{ என்பது}$$

ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum_1^{\infty} u_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore x < 1$ ஆனால் குறி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனால் விரி தொடர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n \cdot x^2}$ என்ற தொடரின் குவி, விரி தன்மையைக் காண்க.

$$u_n = \frac{1}{1+n \cdot x^2}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)x^{2+1}}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+(n+1)x^{2+1}} \div \frac{1}{1+n \cdot x^2}$$

$$= \frac{1+n \cdot x^2}{1+(n+1)x^{2+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n \cdot x^2} + 1}{\frac{1}{n \cdot x^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)x}$$

$x > 1$ எனில்,

$$\therefore \text{எனவே } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{x}$$

(i) $\frac{1}{x} < 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவி தொடர். எனவே,

$x > 1$ ஆனால், $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) $\frac{1}{x} > 1$ அதாவது, $x < 1$ ஆனால்,

$$1+x < 2, \quad \therefore \frac{1}{1+x} > \frac{1}{2}.$$

$$1 + 2x^n < 8 \quad \therefore \quad \frac{1}{1 + 2x^n} > \frac{1}{8}$$

$$\dots \quad \dots \quad = \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad = \quad \dots$$

$$\therefore \quad u_n > \frac{1}{n+1} = v_n.$$

$\sum_1^{\infty} v_n$ ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum_1^{\infty} u_n$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

$$(iii) \quad \frac{1}{x} = 1 \text{ என்றால் } x = 1 \quad \therefore \quad u_n = \frac{1}{1+n}$$

$$\therefore \quad \sum_1^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \text{ என்பது விரி}$$

தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 13:

$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{x+2} + \frac{x^3}{x+3} + \dots \infty$ என்ற தொடரில் குவி விரி தன்மையை ஆறிக.

$$u_n = \frac{x^n}{x+n}$$

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{x+(n+1)}$$

$$\therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{x+(n+1)} \div \frac{x^n}{x+n}$$

$$= \frac{x^{n+1}}{x+(n+1)} \times \frac{x+n}{x^n}$$

$$= \frac{x+n}{x+n+1} \cdot x = \left[\frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n} + \frac{1}{n}} \right] x$$

$$\text{எவ்நிலை } \begin{matrix} u_{n+1} \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} = \begin{matrix} \text{எவ்நிலை} \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \left[-\frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n} + \frac{1}{n}} \right] x = x.$$

$\therefore x < 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவி தொடர்.

$x > 1$ ஆனால் அத்தொடர் விரி தொடர்.

$$x = 1 \text{ ஆனால் } u_n = -\frac{1}{1 + n} \quad \therefore v_n = \frac{1}{n}.$$

$$\sum_1^{\infty} v_n = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \text{ என்ற தொடர் ஒரு விரி தொடர்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எவ்நிலை } \begin{matrix} u_n \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} &= \begin{matrix} \text{எவ்நிலை} \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \frac{n}{1+n} \\ &= \begin{matrix} \text{எவ்நிலை} \\ n \rightarrow \infty \end{matrix} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1. \end{aligned}$$

எனவே $\sum u_n$ -ம் $\sum v_n$ -ம் ஒரேயளவு குவியும் அல்லது விரியும். ஆனால் $\sum v_n$ ஒரு விரி தொடர். ஆகையால் $\sum u_n$ -ம் விரி தொடராகும்.

$\therefore x < 1$ ஆனால் $\sum u_n$ குவி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனால் $\sum u_n$ விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} \quad (x > 0) \text{ என்ற தொடரின் குவிதல், விரிதல்}$$

தீர்மானங்கள் காண்க.

(i) $x > 1$ என்கால்

$$x^n + x^{-n} > x^n$$

$$\therefore \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \frac{1}{x^n}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} \quad \text{ஆனால்}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{\infty} u_n < \sum_{j=1}^{\infty} r_n$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \text{ என்ற பெருக்குத் தொடரிக் பொது}$$

விதிதம் $\frac{1}{x} < 1$. ஆகையால் $\sum_{j=1}^{\infty} r_n$ ஒரு குறி தொடராகும்.

$$\therefore \sum_{j=1}^{\infty} u_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} \text{ ஒரு குறி தொடராகும்}$$

(ii) $0 < x < 1$ ஆனால்

$$x^n + x^{-n} > x^{-n} \quad \therefore \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \frac{1}{x^{-n}} = x^n$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} < \sum_{j=1}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} x^n \text{ என்ற பெருக்குத் தொடரிக் பொது விதிதம் } x < 1$$

என இருப்பதால் அத்தொடர் $\sum_{j=1}^{\infty} x^n$ ஒரு குறி தொடர். ஆக

யால் $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}$ -ம் ஒரு குறி தொடராகும்.

(iii) $x = 1$ ஆனால்

$$\frac{1}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

= விரி தொடர்.

$\therefore x > 0$ ஆனால்

$$x < 1\text{-க்கு } \sum \frac{1}{x^n + x^{-n}} \text{ ஒரு குவி தொடர்.}$$

$$x = 1\text{-க்கு } \sum \frac{1}{x^n + x^{-n}} \text{ ஒரு விரி தொடர்.}$$

3-16. கோதீன் T :

கோதீன் மூலகோதீன் (Cauchy's Root Test)

கூட்டுடன் உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு சத்தழித் தொடர்

(i) எக்ஸ் $(u_n)^{1/n} = l < 1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(ii) எக்ஸ் $(u_n)^{1/n} = l > 1$ என்றால் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு: (i)

$$\text{எக்ஸ் } (u_n)^{1/n} = l,$$

$n \rightarrow \infty$

$$\therefore |(u_n)^{1/n} - l| < \epsilon$$

$n > n$ என்ற மதிப்புகளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட சிறிய ϵ -க்கு $1-\epsilon < (u_n)^{1/n} < 1+\epsilon$ என்று பொருத்தும் வகையில் ஒரு m காணலாம்.

$$l < 1 \text{ என்றால்,}$$

$l < k < 1$ என்று பொருத்தும் வகையில் k எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$l - \epsilon < k < l$ என்று பொருத்தும் வகையில் ϵ எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். இதற்குத் தக்க $n < N$ எனில்,

$$l - \epsilon < (u_n)^{1/n} < l + \epsilon$$

$$\therefore (u_n)^{1/n} < k.$$

$$u_n < k^n, \quad n \geq N \text{ என்ற மதிப்புகளுக்கு.}$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n < \sum_{1}^{\infty} k^n$$

$$\sum_{1}^{\infty} k^n \text{ என்ற பெருக்குத் தொடரில் பொதுவிகிதம் } k < 1,$$

$$\text{எனவே, } \sum_{1}^{\infty} k^n \text{ ஒரு குறி தொடராகும்.}$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n \text{-ம் ஒரு குறி தொடராகும்.}$$

$$(ii) \text{ எக்ஸு } (u_n)^{1/n} = l > 1, \\ n \rightarrow \infty$$

$l - \epsilon > 1$ என்று பொருத்தும்படி ϵ என்ற மிகச் சிறிய எண்ணை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$$n \geq N \text{ என்ற மதிப்புகளுக்கு}$$

$$(u_n)^{1/n} > l - \epsilon > 1,$$

$$\therefore u_n > (l - \epsilon)^n$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} u_n > \sum_{1}^{\infty} (l - \epsilon)^n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - e^*) \text{ என்ற பெருக்குத்தொடரில், அதன் பொது}$$

விதிதம் $1 - e > 1$ என்றபடியால் அத்தொடர் $\sum (1 - e)^n$ விரி தொடராகும்.

$$\text{எனவே } \sum_{i=1}^{\infty} n_i \text{ என்ற தொடரில் } n \text{ ஆவது உறுப்பும், அதற்கு}$$

அடுத்து வரும் உறுப்புகளும், $\sum (1 - e)^n$ என்ற விரி தொடரின் உறுப்புகளைவிடப் பெரியனவாக உள்ளன.

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} n \text{ என்பது ஒரு விரி தொடர்.}$$

குறிப்பு :

எல்லை $(n^*)^{1/n} = 1$ என்றும் இச்சொத்தை பயன்படாது.
 $n \rightarrow \infty$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^i}{(1+n)^{n^i}} \text{ -ன் குவி/விரி தன்மைவை அறிக.}$$

$$u_n = \frac{n^n}{(1+n)^{n^2}} = \left(\frac{n}{1+n} \right)^{n^2}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{n^2}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left[\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{n^2} \right]^{1/n} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\therefore \text{எல்லை } u_n^{1/n} = \text{எல்லை } \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

$$= \text{எல்லை } n \rightarrow \infty \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ என்ற தொடரில்
 $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$ என்றால் அத்தொடரில்
 குவி/குவி தன்மையை அறிக.

$$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

$$\therefore u_n = \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2^n - 1}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left(\frac{1}{2^n - 1} \right)^{1/n} = \frac{1}{(2^n - 1)^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{\left[2^n \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \right]^{1/n}}$$

$$= \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)^{1/n}}$$

$$\therefore \text{எல்லை } n \rightarrow \infty (u_n)^{1/n} = \text{எல்லை } \frac{1}{2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)^{1/n}}$$

$$\left[\because \text{எல்லை } \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)^{1/n} = 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} < 1.$$

$\therefore \sum u_n$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$\sum \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+n)}{n^n}$ என்ற தொடரின்
ஞனிதம், விசிதம் தன்மைமை அறிக.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(n+2)}{n} \cdot \frac{(n+3)}{n} \dots \frac{(n+n)}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \dots \dots \\ &\quad \left(1 + \frac{n}{n}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore (u_n)^{1/n} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. \dots \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n} \end{aligned}$$

$= k$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \dots \dots \right. \\ \left. \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n} \\ = \log k \end{aligned}$$

இடம் புறம்,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \log \left(1 + \frac{r}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \log(1+x) \, dx \\
&= [x \log(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx \\
&= \log 2 - [x - \log(1+x)]_0^1 \\
&= 2 \log 2 - 1 = \log 4 - \log e \\
&= \log \frac{4}{e}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \log \frac{4}{e} = \log k.$$

$$\therefore k = \frac{4}{e} < 1. \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = k > 1$$

$\therefore \sum u_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$$\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \text{ என்ற தொடரில் குவி/விரி தன்மையை}$$

அறிக.

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{1/n}$$

$$(u_n)^{1/n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{e} < 1.$$

$$\therefore \sum_1^{\infty} u_n \text{ என்ற தொடர் குவி தொடராகும்.}$$

3-17. கோதீன் 3: கோதீன் ஒருக்கத் கோதீன் (Cauchy's Condensation Test):

$f(n) > 0, f(n+1) < f(n)$ ஆனால் n -ன் எல்லாக் கூட்டுடன் மதிப்புகளுக்கும், $a > 1$ என்ற கூட்டு முழு எண்ணிற்கு $\sum f(n)$ -ம், $\sum a^n f(a^n)$ -ம் ஒருக்கே குவியும் அல்லது ஒருக்கே விசியும்.

தெரிவு:

$\sum f(n)$ ஐப் பின்புலமாக எழுதலாம்:

$$\begin{aligned} \sum f(n) &= [f(1) + f(2) + \dots + f(a)] \\ &\quad + [f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(a^2)] \\ &\quad + [f(a^2+1) + f(a^2+2) + \dots + f(a^3)] \\ &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\quad + [f(a^{n-2}+1) + f(a^{n-2}+2) + \dots + f(a^n)] \\ &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \\ &\quad + \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

இவ்வடைப்புகளுக்குள் உள்ள கூட்டுத் தொகைகளை $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ என்போம். அவ்வடைப்புகளுள் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முறையே,

$$a, (a^2 - a), (a^3 - a^2), \dots, (a^n - a^{n-2}), \dots$$

$$\sum f(n) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum u_n.$$

$$\begin{aligned} \therefore u_n &= f(a^{n-1}+1) + f(a^{n-1}+2) + \dots + f(a^n) \\ &= n \text{ ஆவது அடைப்புகளுள் உள்ள } (a^n - a^{n-1}) \\ &\quad \text{உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.} \end{aligned}$$

$$f(a^{n-1}) \geq f(a^{n-1}+1) \geq f(a^{n-1}+2) \geq \dots \geq f(a^n)$$

$$\therefore (a^n - a^{n-1}) f(a^{n-1}) \geq u_n \geq (a^n - a^{n-1}) f(a^n)$$

$$(a-1)a^{n-1}f(a^{n-1}) \geq u_n \geq \left(1 - \frac{1}{a}\right)a^n f(a^n) \dots (A)$$

$$u_n \leq (a-1)a^{n-1}f(a^{n-1})$$

$$\therefore u_1 \leq (a-1)af(a)$$

$$u_2 \leq (a-1)a^2f(a^2)$$

$$u_3 \leq (a-1)a^3f(a^3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq (a-1)[af(a) + a^2f(a^2) + a^3f(a^3) + \dots \infty]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq (a-1)\sum a^n f(a^n)$$

$\sum a^n f(a^n)$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடரானால்,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ -ம் ஒரு குவி தொடராகும். இத்தொடருடன் } u_n \text{ ஐக்}$$

கூட்டுவதால் இதன் தன்மை மாறுவதில்லை.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ -ம் ஒரு குவி தொடராகும்.}$$

(A)-ன் மூலம்,

$$u_n \geq \left(1 - \frac{1}{a}\right)a^n f(a^n).$$

$$\therefore u_1 \geq \left(1 - \frac{1}{a}\right)af(a).$$

$$u_2 \geq \left(1 - \frac{1}{a}\right)a^2f(a^2).$$

$$u_2 > \left(1 - \frac{1}{a}\right) a^2 f(a^2).$$

$$+ \dots + \dots + \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\therefore u_1 + u_2 + u_3 + \dots + \infty > \left(1 - \frac{1}{a}\right) [af(a) + a^2 f(a^2) + \dots + \infty]$$

$$\sum_1^{\infty} u_n > \left(1 - \frac{1}{a}\right) \sum a^n f(a^n),$$

$\sum a^n f(a^n)$ ஒரு விசி தொடரானால் $\sum u_n$ -ம் ஒரு விசி தொடராகும்.

$$\text{எனவே, } \sum_1^{\infty} u_n = \sum_1^{\infty} f(n)\text{-ம், } \sum_1^{\infty} a^n f(a^n)\text{-ம் ஒருங்கே}$$

குவிதம் அல்லது விசிதம்.

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\log n} \text{ ஒரு விசி தொடர் என்று திரு.}$$

a ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாகும்.

$$f(n) = \frac{1}{\log n}.$$

$$a^n f(a^n) = a^n \cdot \frac{1}{\log a^n} = \frac{a^n}{n \log a} = \frac{a^n}{n} \cdot \frac{1}{\log a}.$$

$$\sum a^n f(a^n) = \sum \frac{a^n}{n} \cdot \frac{1}{\log a} = \frac{1}{\log a} \sum \frac{a^n}{n}.$$

$$\sum \frac{a^n}{n} \text{ என்பதொரு விசி தொடர். எனவே,}$$

$$\frac{1}{\log a} \sum \frac{a^n}{n} = \sum a^n f(a^n)\text{-ம் ஒரு விசி தொடராகும்.}$$

$$\left(\text{எனவே} \quad \frac{n^p}{n} > \frac{1}{n \log n} \right)$$

$$\therefore \sum_1^{\infty} \frac{1}{\log n} \text{ ஒரு விரி தொடராகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$\sum \frac{1}{n(\log n)^p}$ என்ற தொடர் $p > 1$ ஆனால் குவியும், $p < 1$ ஆனால் விரியும்.

$$f(n) = \frac{1}{n(\log n)^p} \text{ ஆனால், } a \text{ என்ற தேர் முழு எண்ணுக்கு,} \\ (a > 1),$$

$$a^p f(a^p) = \frac{a^p}{a^p (\log a^p)^p}$$

$$= \frac{1}{(n \log n)^p} = \frac{1}{n^p (\log n)^p}$$

$$\therefore \sum a^p f(a^p) = \sum \frac{1}{n^p (\log n)^p} \\ = \frac{1}{(\log n)^p} \sum \frac{1}{n^p}.$$

$\therefore p > 1$ ஆனால் $\sum a^p f(a^p)$ குவி தொடராகும்.

எனவே $\sum_1^{\infty} f(n)$ -ம் குவி தொடராகும்.

$p < 1$ ஆனால் $\sum a^p f(a^p)$ ஒரு விரி தொடர்.

எனவே $\sum_1^{\infty} f(n)$ -ம் ஒரு விரி தொடராகும்.

3-18. **Geoghe 9 :**

இரவீரின் விசித Geoghe (Rashe's Ratio Test):

$\sum v_n$ என்ற தொடர்ச்சு, எக்லு $n \left[\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right] = l$ ஆனல்

(i) $l > 1$ ஆனல் $\sum v_n$ ஒரு குவி தொடர்ச்சு.

(ii) $l < 1$ ஆனல் $\sum v_n$ ஒரு விசித தொடர்ச்சு.

தெரிப்பு :

$\sum v_n = \sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடர்ச்சு எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடர்ச்சு $p > 1$ ஆனல் குவியும்; $p < 1$ ஆனல் விசியும்.

$$\text{எக்லு } n \left[\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right] = \text{எக்லு } n \left[\frac{(n+1)^p}{n^p} - 1 \right]$$

$$= \text{எக்லு } n \left[\frac{n^p \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p}{n^p} - 1 \right]$$

$$= \text{எக்லு } n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1}{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \text{எக்லு } n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1^{p-1}}{\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1} \right]$$

$$= p + 1^{p-1} = p$$

$$\therefore \left| n \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right) - p \right| < \epsilon.$$

இ.க. - 20

எனவே e என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண் கொடுக்கப்பட்டாலும்

$$n > m_1 \text{ ஆனால் } p - e < n \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right) < p + e$$

எனப் பொருத்தும்படி m_1 காணலாம்.

அதேபோல $n > m_2$ ஆனால்

$$l - e < n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < l + e \text{ எனப் பொருத்}$$

தும்படி m_2 காணலாம்.

$l > 1$ எனில் $l > p > 1$ என்று பொருத்தும்படி p ஐ எடுத்துக்கொண்டு e என்ற மிகச் சிறிய கூட்டெண்ணுக்கு $n > m$ என்ற மதிப்பிற்கு $l - e > p + e$ என்று அமையும்படி m ஐ எடுத்துக் கொண்டாக.

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > n \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right)$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

எனவே $p > 1$ ஆனால் $\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n^p}$ ஒரு குனி தொடராகும்.
(சேரதரிசு 4-ல் படி.)

$\therefore \Sigma v_n$ -ம் குனி தொடராகும்.

(ii) $l < 1$ ஆனால் $l < p < 1$ என்று பொருத்தும்படி p ஐ எடுத்துக் கொண்டாக, e என்ற மிகச்சிறிய கூட்டு எண்ணை $l - e < p - e$ என்று அமையும்படி எடுத்துக் கொண்டோம். இதற்குத் தக்கபடி m ஒன்றை, $m < n$ எனிக்,

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < n \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right)$$

என்றபடி காண முடியும்.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{r_{n+1}}{r_n}.$$

(விதி)சொதனை 4-ன் படி $\rho < 1$ ஆனும், $\sum r_n = \sum \frac{1}{x^p}$ ஒரு விரி தொடராகும்.

$\therefore \sum u_n$ -ம் விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 21 :

$$\sum_1^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{x^n}{2n-1} \quad \text{என்ப தொடர் குவி}$$

தொடர ஆகலது விரி தொடர எனக் காண்க.

$$u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{x^n}{2n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{n+1}}{2n+1}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot x$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \cdot x$$

$$\text{எனவே } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \cdot x$$

$$= x.$$

$x < 1$ ஆனும் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடர்.

$x > 1$ ஆனும் $\sum u_n$ ஒரு விரி தொடர்.

$x = 1$ ஆனால்

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}$$

$$\therefore n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] = \frac{n(2n-1)}{(2n-1)^2}$$

$$\text{எனவே } n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] = \text{எனவே } \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)^2}$$

$$= \text{எனவே } \frac{\left(2 - \frac{1}{n} \right)}{\left(2 - \frac{1}{n} \right)^2}$$

$$= \frac{2}{1} = \frac{2}{1} > 1.$$

$x = 1$ ஆனால் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

(i) $x < 1$ ஆனால் குவியும்.

(ii) $x > 1$ ஆனால் விரியும்.

எடுத்துக்காட்டு 22 :

$$u_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 2n} \cdot x^{2n}$$

ஆனால் $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஒரு குவி தொடராக அல்லது விரி தொடராக எனக் காண்க.

$$u_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 2n} \cdot x^{2n}$$

$$u_{n+1} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n-2)^2 \cdot (2n)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot x^{2n+2}$$

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) (2n) \left(1 + \frac{2}{2n}\right)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{எவ்வீதம் } \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \text{எவ்வீதம் } \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{2}{2n}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$\therefore x < 1$ ஆனும் Σu_n ஒரு குறி தொடராகும்.

$x > 1$ ஆனும் Σu_n ஒரு விரி தொடராகும்.

$$x = 1 \text{ ஆனும், } n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n(2n+2)}{(2n)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எவ்வீதம் } n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) &= \text{எவ்வீதம் } \frac{n^2 \left(2 + \frac{2}{n} \right)}{n^2 \cdot 4} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{2}{2} > 1. \end{aligned}$$

$\therefore \Sigma u_n$ ஒரு குறி தொடராகும்.

$\therefore x < 1$ ஆனும் Σu_n ஒரு குறி தொடர்.

$x > 1$ ஆனும் Σu_n ஒரு விரி தொடர்.

எடுத்துக்காட்டு 23 :

$$\frac{2}{2.4} + \frac{2.4}{2.5.6} + \frac{2.4.6}{2.5.7.8} + \frac{2.4.6.8}{2.5.7.9.10} + \dots \dots \dots \infty$$

என்ப தொடர் ஒரு குறி தொடர் என திறவுதல்.

$$u_n = \frac{2.4.6.8 \dots 2n}{2.5.7 \dots (2n+1)} \cdot \frac{1}{2n+2}$$

$$u_{n+1} = \frac{2.4.6.8 \dots 2n \cdot (2n+2)}{2.5.7 \dots (2n+3)} \cdot \frac{1}{2n+4}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+4}$$

$$\begin{aligned} \therefore n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] &= n \left[\frac{(2n+3)(2n+4)}{(2n+3)(2n+2)} - 1 \right] \\ &= n \left[\frac{2n+3}{(2n+2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$n \rightarrow \infty \quad n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] = n \rightarrow \infty \quad n \left[\frac{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{2}{n} \right)^2} \right]$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2} < 1$$

$\therefore \sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 24 :

$$\sum_1^{\infty} u_n = \sum_1^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)} \cdot \frac{x^n}{3n+2}$$

எந்த தொடரின் குவியின் தன்மைவை அறிக.

$$u_n = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)} \cdot \frac{x^n}{(3n+2)}$$

$$u_{n+1} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n(3n+3)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1)(3n+4)} \cdot \frac{x^{n+1}}{3n+5}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+3}{3n+4} \cdot \frac{3n+2}{3n+5} \cdot x$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow \infty \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= n \rightarrow \infty \quad \frac{\left(3 + \frac{3}{n} \right) \left(2 + \frac{2}{n} \right)}{\left(3 + \frac{4}{n} \right) \left(3 + \frac{5}{n} \right)} \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

$\therefore x < 1$ ஆனாக Σu_n ஒரு குவி தெரடர.

$x > 1$ ஆனாக Σu_n ஒரு விசி தெரடர.

$x = 1$ ஆனாக,

$$\begin{aligned} n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] &= n \left[\frac{(8n+4)(8n+5)}{(8n+8)(8n+9)} - 1 \right] \\ &= n \left[\frac{18n+14}{(8n+8)(8n+9)} \right] \\ &= n^2 \left[\frac{18 + \frac{14}{n}}{n^2 \left(8 + \frac{8}{n} \right) \left(8 + \frac{9}{n} \right)} \right] \\ &= \frac{18 + \frac{14}{n}}{\left(8 + \frac{8}{n} \right) \left(8 + \frac{9}{n} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எக்ஸி} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right] &= \text{எக்ஸி} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{18 + \frac{14}{n}}{\left(8 + \frac{8}{n} \right) \left(8 + \frac{9}{n} \right)} \\ &= \frac{18}{8} = \frac{9}{4} > 1. \end{aligned}$$

$\therefore x = 1$ ஆனாக Σu_n ஒரு குவி தெரடராகும்.

3-19. டிபர்சாகக், பெர்சுரன்சுக் கோதின் 10 :

Σu_n எக்ர கூட்டு எக்ர தெரடரிக்,

$$\text{எக்ஸி} \lim_{n \rightarrow \infty} \log n \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = k \text{ ஆனாக}$$

$k > 1$ -க்கு அத்தெரடர குவிதம்; $k < 1$ -க்கு அத்தெரடர விசிதம்.

தெரிவு :

$v_n = \frac{1}{n (\log n)^p}$ என்று கொண்டால் $\sum v_n$ என்ற தொடர், $p > 1$ என்ற மதிப்பிற்குக் குவிவும். $p < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு ஹிவியும்.

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{v_{n+1}} &= \frac{(n+1) [\log(n+1)]^p}{n (\log n)^p} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{1}{\log n} + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^p \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{1}{n \log n} + \frac{1}{2n^2 \log n} + \frac{1}{3n^3 \log n} + \dots\right]^p \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{p}{n \log n} + \frac{p^2}{2n^2 \log n} + \dots\right] \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n \log n} + \frac{p^2}{n^2 \log n} + \dots \end{aligned}$$

$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{K}{n \log n} + \dots$; $K > 1$ என்று இருக்குமானால் $1 < p < K$ என்று அமையும். p ஐ எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$$\therefore \frac{v_n}{v_{n+1}} > \frac{v_n}{v_{n+1}}, \text{ எனவே } \sum v_n \text{ குவிவும்.}$$

$\therefore \sum v_n$ -ம், $K > 1$ என்ற மதிப்பிற்குக் குவி தொடராகும்.

$$\text{ஆனால் எக்ஸ் } \log n \left[n \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = K$$

$\therefore \sum v_n$ என்ற தொடர்,

$$\text{எக்ஸ் } \log n \left[n \left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = K > 1$$

என்றிருக்கும்போது குவி தொடராகும்.

n -ன் மிகப் பெரிய மதிப்புகளுக்கு, p ஐ $K < p < 1$ என்ற அளவடிப்படி எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}},$$

எனவே $\sum v_n$ விரியும். $\therefore K < 1$ -க்கு, $\sum u_n$ -என்ற தொடரும் விரியும்.

$$\text{ஆதலது எக்லை} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log n \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = K < 1$$

என்ற மதிப்பிற்கு $\sum u_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 35 :

$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 8^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 8^2 \cdot 6^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2} + \dots$ என்ற தொடரின் குவி/விரி தன்மைகளை ஆரிக.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^2 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\therefore \text{இங்கு } A = \frac{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2n} \right)} = -\frac{1}{4}; \quad n \rightarrow \infty \text{ என்னும்போது.}$$

\therefore எக்லை $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$; \therefore ஆய்வின் சேதனை இங்குப் பயன்படாவிடும்.

எனவே ராபின்சின் சேதனையைச் செய்து பரித்தால்,

எக்லை $\left\{ n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right\} = 1$ ஆகிறது. எனவே ராபின்சின் சேதனையும் பயன்படாது.

எனவே \therefore மரீகான், பெர்டுரன்டின் சேதனைப்படி,

$$\left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n = A \left(\frac{\log n}{n} \right) + \text{மதிப்பில் மிகக் குறைவான உறுப்புகள்.}$$

$$\therefore \text{எக்ஸி} \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n \approx 0$$

$$\left[\text{குறிப்பு: } \text{எக்ஸி} \frac{\log n}{n} \approx 0 \right]$$

$$\text{ஏனெனில் } \frac{\text{எக்ஸி}}{n} \rightarrow 0 \quad \frac{\log n}{n} = 0.$$

$$\therefore \text{எக்ஸி} \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n \approx 0.$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் u_n மார்க்ஸ் சோதனைப்படி ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 27 :

$$u_n = \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right\}^2 \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \quad \text{என்றால்}$$

$\sum u_n$ குறி தொடர் அல்லது விரி தொடர்?

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{எக்ஸி} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \text{எக்ஸி} \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \text{எக்ஸி} \frac{4n(n+2)}{4n^2+4n+1} = 1. \end{aligned}$$

எனவே u_n ஆலம்பரீஸ் சோதனை பயனில்க்கும்.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \text{எக்ஸி} \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right] \\ \text{எக்ஸி} \left[n \left(\frac{4n^2+8n-4n^2-4n-1}{4n^2+4n+1} \right) \right] \\ = \text{எக்ஸி} \frac{4n^2-n}{4n^2+4n+1} = 1. \end{aligned}$$

எனவே ராபீனீன் சோதனைப்படி பயனில்க்கும்.

(iii) எனவே u_n மார்கன் சோதனைப்படி,

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸு } \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \log n \\ &= \text{எக்ஸு } \left(\frac{4n^2 - n - 4n^2 - 4n - 1}{4n^2 + 4n + 1} \right) \log n \\ &= \text{எக்ஸு } \log \left(\frac{-5n}{4n^2} \right) \log n = 0. \end{aligned}$$

எனவே, $\sum u_n$ என்ற தொடர் u_n மார்கன் சோதனையின்படி ஒரு விரி தொடராகும்.

3-20. சோதனை 11 :

மடக்கைச் சோதனை (Logarithmic Test)

ஒரு கூட்டு எண்ணைக் கொண்டு ஒரு தொடரை

(i) எக்ஸு $\left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) > 1$ ஆனால் அத்தொடர் குவி

தொடராகும்.

(ii) எக்ஸு $\left(n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) < 1$ ஆனால் அத்தொடர் விரி

தொடராகும்.

தெரிவு:

(i). $\sum u_n = \sum \frac{1}{n^p}$ என்ற தொடரை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p$$

$p > 1$ ஆனால் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடராகும். மேலும்

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{u_n}{u_{n+1}} \text{ ஆனால் } \sum u_n \text{ குவியும்.}$$

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p.$$

$$\therefore \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$\log \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{p}{n} - \frac{p}{2n^2} + \dots$$

$$n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p - \frac{p}{2n} + \dots$$

$$\therefore \text{எல்லாம் } n \rightarrow \infty \quad n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > \text{எல்லாம் } \left[p - \frac{p}{2n} + \dots \right]$$

$$\text{எல்லாம் } n \rightarrow \infty \quad n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} > p > 1$$

(ii) $p < 1$ ஆனால் $\exists v_n$ ஒரு வரிசை.

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{v_{n+1}} \text{ ஆனால் } \exists v_n \text{ ஒரு வரிசை.}$$

$$\therefore \frac{u_n}{u_{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p.$$

$$\therefore \log \frac{u_n}{u_{n+1}} < p \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

$$\log \frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{p}{n} - \frac{p}{2n^2} + \dots$$

$$\therefore n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} < p - \frac{p}{2n} + \dots$$

$$\therefore \text{எல்லாம் } \left[n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right] < \text{எல்லாம் } \left(p - \frac{p}{2n} + \dots \right)$$

$$\therefore \text{எல்லாம் } \left[n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right] < p < 1 \quad \text{ஆனால்}$$

$\exists u_n$ ஒரு வரிசை.

எடுத்துக்காட்டு 28 :

4மே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவி தொடர்தான் அல்லது விரி தொடர்தான்?

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2^2} \cdot x^2 + \frac{\frac{3}{4}}{4^2} \cdot x^3 + \frac{\frac{4}{8}}{8^2} \cdot x^4 + \dots \dots \infty$$

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{\frac{n-1}{n^2-1}}{\frac{n-1}{n^2-1}} \cdot x^{n-1} + \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{n}{(n+1)^2}} \cdot x^n \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{x} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸி} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \text{எக்ஸி} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} \\ n \rightarrow \infty & \quad \quad \quad = \frac{e}{x}. \end{aligned}$$

$\therefore x < e$ ஆனால் $\sum u_n$ ஒரு குவி தொடர்.

$x > e$ ஆனால் $\sum u_n$ ஒரு விரி தொடர்.

$$x = e \text{ ஆனால், } \frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{e}.$$

$$\therefore n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} = n \left\{ n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log e \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸி} \quad \left[n \log \frac{u_n}{u_{n+1}} \right] &= \text{எக்ஸி} \quad n \left[n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \dots \right) - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

$\therefore \sum u_n$ ஒரு விரி தொடராகும்.

3.22 மேற்கூறிய சோதனைகளின் உருக்கமான விளக்கம் :

1. ஒப்பீட்டுச் சோதனை :

எக்ஸி $\frac{u_n}{v_n}$ ஒரு திட்டமான எண். $\sum v_n$ ஒரு குவி அல்லது விரி தொடரானால் $\sum u_n$ -ம் குவி அல்லது விரி தொடராகும்.

2. கோசியின் மூல சோதனை :

$2M_0$ என்ற தொடர்,

எல்லாம் $\mu_n^{-1/n} < 1$ அல்லது > 1 என்றும் குறிப்பும் அல்லது $n \rightarrow \infty$

விரியும்.

3. டி ஆலம்பரின் சோதனை :

$2N_0$ என்ற தொடர்,

எல்லாம் $\frac{\mu_n}{n} > 1$ அல்லது < 1 என்றும், குறி தொடராகும்

அல்லது விரி தொடராகும்.

4. ராபின்சின் சோதனை :

$2M_0$ என்ற தொடரில், எல்லாம் $\frac{\mu_n}{n} = 1$ ஆனால் டி ஆலம்பரின்

சோதனை பயன்படாது. அப்பொழுது எல்லாம் $n \left(\frac{\mu_n}{n} - 1 \right) > 1$ அல்லது < 1 ஆக இருக்கும்போது அத்தொடர் குறி தொடராகும் அல்லது விரி தொடராகும்.

5. டி மாக்லான், பெர்டுரண்டின் சோதனை :

ஒரு தொடரின் தன்மையை அறிய ராபின்சின் சோதனை பயன்படாவிடில், அதாவது,

எல்லாம் $n \left(\frac{\mu_n}{n} - 1 \right) = 1$ என்று வகுமாகில், தமக்கு

டி மாக்லான் சோதனைகளைப் பயன்படி, $2M_0$ என்ற தொடர்,

எல்லாம் $\left[n \left(\frac{\mu_n}{n} - 1 \right) - 1 \right] \log n > 1$ அல்லது < 1

என்ற மதிப்பிற்கு குறிப்பும் அல்லது விரியும்.

6. மடக்கைச் சோதனை :

$2M_0$ என்ற தொடர்,

எல்லாம் $\left(n \log \frac{\mu_n}{n} \right) > 1$ அல்லது < 1 என்ற மதிப்பிற்கு

குறிப்பும் அல்லது விரியும்.

7. கோடுவின் ஒடுக்கத் கோடுகள் :

$f(n)$ கூட்டு மதிப்புடையதும், ஒகியல்பான இரங்கும் தொடர் முறையும் ஆனாக, $n > 1$ என்ற என்ற கூட்டு முழு எண்ணிற்று,

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

$$nf(n) + n^2 f(n^2) + n^3 f(n^3) + \dots + n^n f(n^n) + \dots$$

என்ற இரண்டு தொடர்ச்சுகளும் குவியும் அல்லது விரியும்.

இதுவரை நாம் கூட்டெண்ணின் தொடர்ச்சின் தன்மையைப் பற்றிப் பார்த்தோம். இனி நாம் கூட்டெண்கள், குறையெண்கள் கலந்த தொடர்ச்சின் குவிதல், விரிதல், அவிதல் தன்மையைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

3-23. அடக் குவிதல் (Absolute Convergence) :

ஒரு கூட்டு, குறை எண்கள் கலந்த தொடரின் உறுப்புகளின் மட்டு மதிப்புகளை எடுத்து ஒரு தொடர் அமைப்போமாகில் அத் தொடர் ஒரு குவி தொடராகியும்கூட, அக் கூட்டு, குறை எண் கலந்த தொடர் ஓர் அடக் குவியும் தொடர் (Absolutely convergent series) எனப்படும்.

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ என்ற கத்தழித் தொடர் கூட்டு, குறை எண்கள் கொண்ட தொடராகும். $|u_1|, |u_2|, |u_3|, \dots$ என்பவைகளைக் கொண்டு ஒரு தொடர் $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$ என்று அமைப்போமாகும், அத் தொடர் ஒரு குவி தொடராகும். $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ என்ற கலப்புத் தொடரை அடக் குவி தொடர் என்று அழைக்கிறோம்.

ஓர் அடக் குவியும் தொடரில் உள்ள உறுப்புகளை இடம் மாற்றி எழுதினும், அப்படிப் பெறப்படும் தொடரும் ஒரு குவி தொடர் ஆகும்.

அடக் குவி தொடரின் எடுத்துக்காட்டு :

$$(1) \quad 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \dots \text{ என்ற தொடரைக் கொண்டு}$$

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \text{ என்ற தொடரை அமைத்தால் இத்}$$

தொடர் ஒரு குவி தொடராகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஓர் அடக் குவி தொடராகும்.

$$(ii) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \infty \text{ என்ற தொடர் ஒரு}$$

அமக் குவி தொடராகும். ஏனெனில் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
 $\dots \infty$ என்ற தொடர் ஒரு குவி தொடர்.

3.24. நிபந்தனைக் குவிதம் (Conditional convergence) :

கூட்டு, குறையெண்கள் கலந்த ஒரு கத்தழித் தொடர் அமக் குவி தொடர் இவ்வாறெனவே குவியுமானால் அத் தொடர் நிபந்தனைக் குவி தொடர் என்று அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots \infty \text{ என்ற தொடர் ஒரு}$$

குவி தொடராகும். ஆனால் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots \infty$
 என்ற தொடர் ஒரு விசி தொடராகும். எனவே

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \dots \infty$$

என்ற தொடர் ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடராகும்.

ஒரு நிபந்தனைக் குவி தொடரில் உள்ள உறுப்புகளை தமக்குத் தகுந்தபடி மாற்றி எழுதினால், அப்படிப் பெறப்படும் தொடர் ∞ முதல் $+\infty$ வரை அமையுமாறு எழுதலாம்.

தேற்றம் 4 :

ஒர் அமக் குவி தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரியு :

Σv_n என்ற கலப்புத் தொடர் அமக் குவி தொடரானால் $\Sigma |v_n|$ ஒரு குவி தொடராகும். $|v_n| = v_n$ ஆனால், Σv_n ஒரு குவி தொடராகும். $\Sigma v_n = V$ எனக் கொள்வோம். ஒரு புதுத் தொடர் $\Sigma (v_n + v_n)$ என்பதை அமைத்தால், v_n ஒரு குறையெண்ணாகியின், v_n கூட்டு எண். எனவே $w_n = v_n + v_n = 0$ ஆகும்.

v_n ஒரு குறை எண்ணாகியின், v_n கூட்டு எண்.

$$w_n = v_n + v_n = 2v_n. \quad \therefore \quad 0 < w_n < 2v_n.$$

Σv_n ஒரு குவி தொடர். எனவே $\Sigma (v_n + v_n)$ -ம் குவி தொடர்.

அதாவது $\sum w_n$ -ம் ஒரு குவி தொடராகும். $\sum w_n = W$ எனக் கொள்க.

$$\begin{aligned}\therefore U_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= (w_1 - v_1) + (w_2 - v_2) + \dots + (w_n - v_n), \\ &= (w_1 + w_2 + \dots + w_n) - (v_1 + v_2 + \dots + v_n).\end{aligned}$$

$$\therefore U_n = W_n - V_n.$$

$$\begin{aligned}\text{எக்ஸ் } n \rightarrow \infty \quad U_n &= \text{எக்ஸ் } n \rightarrow \infty W_n - \text{எக்ஸ் } n \rightarrow \infty V_n \\ &= W - V.\end{aligned}$$

$\therefore \sum w_n =$ ஒரு திட்டமான எண்.

$\therefore \sum w_n$ ஒரு குவி தொடராகும்.

3.25. தேற்றம் 5:

ஒரு தொடரில் கூட்டு, குறை எண்கள் மாறி மாறி வந்து அந்த உறுப்புகளின் கட்டு மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போய், n கத்தழி எல்லைவை அடையும்போது, n ஆவது உறுப்பு பூச்சிய எல்லைவை நெருங்குமளவின், அத்தொடர் ஒரு குவி தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்ற தொடரை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$u_1, u_2, u_3, \dots \text{ எல்லாம் கூட்டெண்கள்.}$$

$$\text{மேலும் } u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$$

$U_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ n உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையானால்,

$$U_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$$u_1 > u_2, u_3 > u_4, \dots, u_{2n-1} > u_{2n}$$

$$\therefore U_{2n} > 0.$$

$$U_{2n+1} = U_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) > U_{2n}$$

$$\therefore U_{2n} \text{ ஓர் ஓசியல்மான ஏறும் தொடர் முறை.}$$

மேலும் $U_{1n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) \dots (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$$u_2 > u_3, u_4 > u_5, \dots, u_{2n-2} > u_{2n-1}$$

$$\therefore U_{1n} < u_1$$

$\therefore 0 < U_{1n} < u_1$. ஆகையால் (U_{1n}) ஓர் ஓரீயக் பரிமாறுத் தொடர் மூன்றாவது, மேல் வரம்புடையதும் ஆகும்.

\therefore எக்ஸ் $U_{1n} = l$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்
 $n \rightarrow \infty$

$$U_{1n+1} = U_{1n} + u_{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸ் } U_{1n+1} &= \text{எக்ஸ் } U_{1n} = \text{எக்ஸ் } u_{2n+1} \\ n \rightarrow \infty & \quad n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty \\ &= l + 0 = l. \end{aligned}$$

n ஒற்றைப் படியானவிலும், இரட்டைப் படியானவிலும்

$$\text{எக்ஸ் } U_n = l, \\ n \rightarrow \infty$$

$\therefore u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ ஒரு குவி தொடராகும்.

கிடைத்தேற்றம்: மேற்கூறிய தேற்றத்தில் (1) எக்ஸ் u_n
 $n \rightarrow \infty$
 $= l \neq 0$ ஆனால் அத்தொடர் அலை தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$$\text{எக்ஸ் } U_{1n} = l \quad (\text{மேற்கூறிய தேற்றத்தின் மூலம்}) \\ n \rightarrow \infty$$

$$\text{எக்ஸ் } U_{2n+1} = \text{எக்ஸ் } (U_{1n} + u_{2n+1}) \\ n \rightarrow \infty$$

$$= l + k.$$

$\therefore u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்ற தொடர் அலை தொடராகும்.

(2) $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்ற தொடரில், n -ன் எக்ஸ் மதிப்புகளுக்கும் $u_{n+1} > u_n > 0$ ஆனால் அத்தொடர் அலை தொடராகும்.

தெரிப்பு :

$$0 < u_1 < u_2 < u_3 \dots < u_n < \infty$$

$$U_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \\ < 0.$$

$$U_{2n+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) \dots - (u_{2n} - u_{2n+1}) \\ > u_1.$$

ஈ கத்தழி எகிலுபை தெருக்குப்போது U_{2n} , U_{2n+1} -ம் ஒரே எகிலு l ஐ தெருக்க முடியாது. ஏனெனில் l ஒருங்கே பூச்சி யத்திற்குக் குறைவாகவும், u_1 -க்குப் பெரியதாகவும் இருக்க முடியாது.

∴ U_{2n} -ம் U_{2n+1} -ம் ஒருங்கே $+$ ∞ அல்லது $-\infty$ -க்கு தெருக்க முடியாது.

∴ $u_1 = u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ என்ற தொடர் ஓர் அநி தொடராகும்.

3-26. தெற்றம் 6 :

Σu_n -ம் Σv_n -ம் அநக் ஞனி தொடர்தகனாகும், அவைகளின் கூட்டுத் தொகை ஞாறவே U , V ஆனல், அவ்விண்டு தொடர் களைப் பெருக்கி வரும் தொடர்

$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \dots$ ஓர் அநக்குனி தொடராகும். அதன் கூட்டுத் தொகை $U \cdot V$.

தெரிப்பு : ஞாறவைதல்.

Σu_n -ம், Σv_n -ம் கூட்டு எண்கள் யட்டுறே கொண்ட தொடர் களாகும்.

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \sum_{i=1}^n v_i$$

$$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n = \sum_{j=1}^n s_j$$

இங்கு $s_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} \therefore S_{2n} &= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots \dots \\ &\quad + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) + \dots \\ &\quad \dots + (u_1 v_{2n} + u_2 v_{2n-1} + \dots + u_n v_{n+1} + u_{n+1} v_n \\ &\quad + u_{2n} v_1) \\ &= u_1 (v_1 + v_2 + \dots + v_{2n}) + u_2 (v_1 + v_2 + \dots + v_{2n-1}) \\ &\quad + \dots + u_n (v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}) \\ &\quad + u_{n+1} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\ &\quad + \dots + u_{2n} v_1 \\ &> (u_1 + u_2 + \dots + u_n) (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = U_n V_n. \end{aligned}$$

மேலும்,

$$S_{2n} < (u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}) (v_1 + v_2 + \dots + v_{2n}) = U_{2n} V_{2n}$$

$$\therefore U_n V_n < S_{2n} < U_{2n} V_{2n}$$

$$\text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad U_n V_n = U \cdot V$$

$$\text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad U_{2n} V_{2n} = U \cdot V$$

$$\therefore \text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad S_{2n} = U \cdot V \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

மேலும் $S_{2n+1} > S_{2n+1} > S_{2n}$

$$\text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad S_{2n+1} = U \cdot V$$

$$\text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad S_{2n} = U \cdot V$$

$$\therefore \text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad S_{2n+1} = U \cdot V \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

n ஒற்றைப்படை எண்ணுமீனும் சரி, இரட்டைப்படை எண்ணுமீனும் சரி, (1), (2)-யிக்குத்,

$$\text{எனவே } n \rightarrow \infty \quad S_n = UV$$

இவ்வவதக :

$\sum u_n$ -ம் $\sum v_n$ -ம் கலப்புத் தொடர் எனக் கொள்வோம்.

$$\sum_1^{\infty} |u_n| = U', \quad \sum_1^N |u_n| = U'_N \text{ எனவும்,}$$

$$\sum_1^{\infty} |v_n| = V', \quad \sum_1^N |v_n| = V'_N \text{ எனவும் கொள்வோம்.}$$

$$s'_n = |u_1| + |v_n| + |u_2| + |v_{n-1}| + \dots + |u_{n-1}| + |v_2| \\ + |u_n| + |v_1|$$

$$S'_n = \sum_1^n s'_n = s'_1 + s'_2 + s'_3 + \dots + s'_n$$

$$|s_n| = |u_1 v_1 + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1| \\ < |u_1| + |v_n| + |u_2| + |v_{n-1}| + \dots \\ + |u_{n-1}| + |v_2| + |u_n| + |v_1| \\ < s'_n$$

$$\text{முதலாவதக } \sum_1^n s'_n \text{ ஒரு குவி தொடர், அதன் கூட்டுத்}$$

தொகை $U' V'$ எனப் பரித்தோம்.

$\therefore \sum |s_n|$ ஒரு குவி தொடராகும்.

அதாவது $\sum S_n$ ஓர் அமக் குவி தொடர்.

$$|U_n V_n - S_n| < |U'_n V'_n - S'_n|$$

ஏனெனில் $|U_n V_n - S_n|$ என்பது பல உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகையின் மட்டுத் தொகை. $U'_n V'_n - S'_n$ என்பது அம் வறுப்புகளின் மட்டு மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை.

$$\text{ஆனால் எவ்வளவு } n \rightarrow \infty \quad |U'_n V'_n - S'_n| = 0$$

$$\therefore \text{எக்ஸ் } \lim_{n \rightarrow \infty} (U_n + V_n) = S_n + 0.$$

$$\therefore \text{எக்ஸ் } S_n = \text{எக்ஸ் } U_n + V_n = U, \quad n \rightarrow \infty$$

3.27. வலுத் தொடர் (Power Series)

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ என்ற தொடரில் a_0, a_1, a_2, \dots என்ற கெழுக்கள் x -ன் சார்பற்றவை (independent), எனவே அத்தொடர் x -ல் ஒரு வலுத் தொடர் எனப்படும்.

மேலே கூறிய தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் நமக்குப் பின்வரும் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

$\sum a_n x^n$ என்ற வலுத் தொடர் $|x| < l$ -க்கு ஓர் அறக் குறி தொடர். $\sum b_n x^n$ என்ற வலுத் தொடர் $|x| < m$ -க்கு ஓர் அறக் குறி தொடர். இவைகளின் கூட்டுத் தொகை முறையே $f(x)$ -ம், $\phi(x)$ -ம் ஆகும். l ஆனது l_1, m என்ற மதிப்புகளில் சிறியதான மதிப்பு என்றால்.

$a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \dots$ ஓர் அறக் குறி தொடராகும். அதன் கூட்டுத் தொகை $f(x) \cdot \phi(x)$.

3.28. தேற்றம் 7 :

வலுத் தொடரின் முற்றொருமை : $|x| < l$ -க்கு $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ என்ற இரு வலுத் தொடர்களும் குறி தொடர்கள். மேலும் அவைகளின் கூட்டுத் தொகைகள் சமமாக இருப்பின்,

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n, \dots \text{ ஆகும்.}$$

தெரியு :

$|x| < l$ -க்கு $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$, என்ற இரண்டு தொடர்களும் குறி தொடர்கள். மேலும்,

$$\sum a_n x^n = \sum b_n x^n.$$

$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots$ ஒரு குவி தொடராகும். அதன் கூட்டுத் தொகை $|x| < 1$ -க்குப் பூர்வமாகும்.

$x = 0$ என எடுத்துச் சொல்வதால்,

$$a_0 - b_0 = 0. \quad \therefore a_0 = b_0. \text{ மேலும் } |x| < 1 \text{ ஆனால்}$$

$(a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots = 0$. இது $x \neq 0$ என்ற மதிப்புகளுக்கு உண்மையாதலின், x ஆல் இரு பக்கம் கிளையும் வகுத்தால்,

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 + \dots = 0.$$

ஏனெனில் $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots$ என்ற தொடர் $|x| < 1$ -க்குக் குவி தொடர். ஆகையால் $|x| < 1$ -க்கு,

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \dots \text{ ம-ம் ஒரு குவி தொடராகும்.}$$

$\therefore |x| < 1$ -க்கு $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \dots = K$ (ஒரு நிபந்தனை எண்).

$$|x| < 1, \quad x \neq 0 \text{-க்கு,}$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + (a_3 - b_3)x^2 + \dots = 0.$$

$$\therefore (a_1 - b_1) = -x[(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)x + \dots]$$

$$\therefore |a_1 - b_1| = |x| |(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)x + \dots| < |x| |K|$$

ϵ எவ்வளவு சிறியதாகக் கொடுக்கப்பட்டாலும், $x \neq 0$ -க்கு $x < \frac{\epsilon}{K}$ என்ற மதிப்பிற்கு $|a_1 - b_1| < \epsilon$.

a_1, b_1 எப்பவை மாறினிகள். அந்த போல் $a_2 = b_2, a_3 = b_3, \dots, a_n = b_n, \dots$

3-29. சுருதுப்புக் சுத்தழித் தொடர் (Binomial Series)

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} x^r + \dots \infty$$

என்ற தொடர் கருவியைத் தொடர் எனப்படும். 'n' ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாகில் அத்தொடர் ஒரு கத்தழித் தொடராகிறது. (n+1) உறுப்புகளை கிடைக்கும் என்பதை முதல் பகுதியில் பார்த்தோம். ஆகையால் இங்கு n ஒரு விவரிதமுது எண்ணாகும். எனவே n-வோ முழு எண்ணாக இரண்டியல் அத்தொடர் கத்தழித் தொடராகும். அப்போது, அது குவிக்கிறதா, விவரிக்கிறதா அல்லது அவிவரிக்கிறதா என்பதைப் பார்ப்போம்.

$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)x^r}{r!} + \dots$ என்ற தொடர் ஒரு கருவியைத் தொடராகும். ஏனெனில் n, x-ன் மதிப்புகளுக்கு, இத் தொடரின் உறுப்புகள் கூட்டு குறை மதிப்புகளைப் பெறும்.

$$u_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!} \cdot x^r$$

$$u_r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)}{(r-1)!} \cdot x^{r-1}$$

$$\therefore \frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot x$$

$$\begin{aligned} \therefore \left| \frac{u_{r+1}}{u_r} \right| &= \left| \frac{n-r+1}{r} \cdot x \right| \\ &= \left| \frac{n-r+1}{r} \right| \cdot |x| \\ &= \left| \frac{n+1}{r} - 1 \right| \cdot |x| \end{aligned}$$

$$\therefore \text{எக்ஸ்ட் } \left| \frac{u_{r+1}}{u_r} \right| = | -1 | \cdot |x|$$

$$\text{ஏனெனில் } \text{எக்ஸ்ட் } \frac{n+1}{r} = 0.$$

$$\therefore \text{எக்ஸ்ட் } \left| \frac{u_{r+1}}{u_r} \right| = |x| \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore |x| < 1$ ஆனல் அத்தொடர் அறக் குவி தொடர். எனவே ஒரு குவி தொடராகும்.

$|x| > 1$ ஆனல் அத்தொடர் குவியாது.

3-30. படிக்குறித் தொடர் (Exponential Series)

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \infty$$

என்ற தொடர் படிக்குறித் தொடர் எனப்படும். x கூட்டு எண்ணின் எல்லா உறுப்புகளும் கூட்டக் குறி பெற்ற இருக்கும். x ஒரு குறை எண் ஆனால் ஒன்று விட்ட உறுப்புகள் கூட்டு, குறை மதிப்பைப் பெறும்.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{x^n}{n} \cdot \frac{n+1}{x^{n+1}} = \frac{x}{n} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x}{n} \right|$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எல்லா } n \rightarrow \infty \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \text{எல்லா } n \rightarrow \infty \left| \frac{x}{n} \right| \\ &= 0 < 1, \end{aligned}$$

எனவே x -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ என்ற தொடர்

ஒர் அறக் குவி தொடர். எனவே குவி தொடராகும்.

3-31. மடக்கைத் தொடர் (Logarithmic Series):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \dots$$

என்ற தொடர் மடக்கைத் தொடர் எனப்படும்.

x கூட்டெண்ணின் ஒன்று விட்ட உறுப்புகள் கூட்டு, குறை மதிப்புகளைப் பெறும். x குறை எண்ணின் எல்லா உறுப்புகளும் குறை மதிப்பைப் பெறும்.

$$u_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}$$

$$= - \frac{n}{n+1} \cdot x$$

$$\therefore \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot |x|$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot |x|$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= |x|.$$

$\therefore |x| < 1$ ஆனால் மடக்கைத் தொடர் குவிக்கிறது.

$|x| > 1$ ஆனால் குவியாது.

$x = -1$ ஆனால், அத்தொடர் $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \dots \infty$ என வரும்.

$\therefore \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \dots \infty \right)$ என்பது விகித தொடராகும்.

$x = 1$ ஆனால், $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \infty$ என்பது குவி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 29 :

$$2P_n = u_1 - \frac{1}{2} (u_1 + u_2) + \frac{1}{8} (u_1 + u_2 + u_3) - \dots$$

கத்தழித் தொடரில், $u_1 > u_2 > u_3 > \dots u_n > \dots$ ஆனால், n கத்தழி எல்லையை தெருங்கும்போது u_n பூச்சியத்தை தெருங்கினால், அத் தொடர் குவி தொடர் என நிறுவலாம்.

$$\sum v_n = u_1 - \frac{1}{2} (u_1 + u_2) + \frac{1}{3} (u_1 + u_2 + u_3) - \dots$$

$= v_1 - v_2 + v_3 - \dots$ எனது எடுத்துக் கொண்டதம்

$$v_n = \frac{1}{n} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) \text{ ஆகும்.}$$

எதிலு $u_n = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்து.
 $n \rightarrow \infty$

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$$

$$u_n < u_1$$

$$u_n < u_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n < u_{n-1}$$

எனவே, $(n-1)u_n < u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$

$$U_n = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{n}; \quad U_{n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}{(n-1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore U_n - U_{n-1} &= \left(\frac{u_1 + u_2 + u_3 \dots u_n}{n} \right) - \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}}{n-1} \right) \\ &= \frac{n u_n - (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1})}{n(n-1)} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \therefore V_n = V_{n-1} < \frac{u_n}{n(n-1)} \quad (\text{எதிலு } u_n = 0) \\ n \rightarrow \infty$$

$$< 0.$$

$$(2) \quad \text{எதிலு } V_n = \text{எதிலு } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} u_i = 0.$$

எனவே (தேற்றம் 5-ல் லுதம்) கொடுக்கப்பட்ட தொடர்ட ஒரு குவி தொடர்டாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 30 :

$\frac{x}{1+x} = \frac{x^1}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^4} + \dots \infty$ ($0 < x < 1$) என்ற தொடரின் குறிவிதி தன்மையை அறிக. (செ.பு.)

$\frac{x}{1+x} = \frac{x^1}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^4} + \dots \infty$ என்ற தொடரை $u_1 = u_2 + u_3 + \dots \infty$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore u_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}} > 0. \text{ ஏனெனில் } 0 < x < 1$$

$$\begin{aligned} \therefore u_n - u_{n+1} &= \frac{x^n}{1+x^{2n}} - \frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}} = \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{2n})(1+x^{2n+2})} \\ &> 0. \text{ ஏனெனில் } x < 1 \end{aligned}$$

$$\therefore u_n > u_{n+1} \text{ (எல்லா } n \text{ மதிப்புகளுக்கும்)}$$

$$\text{மேலும் எக்லை } n \rightarrow \infty \text{ எனில் } \frac{x^n}{1+x^{2n}} = 0.$$

\therefore தேற்றம் 5-ன்படி கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குறி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 31 :

* $1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \dots \infty$ இத்தொடரின் குறிவிதி தன்மையை அறிக.

இத்தொடரை $u_1 = u_2 + u_3 + u_4 + \dots$ என்போம்.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{2}\right)^{n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{2}{2}\right)^n$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \cdot \frac{2}{3} < 1$$

$$\therefore u_{n+1} < u_n$$

$$\therefore u_n > u_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{மேலும், எக்ஸ் } u_n &= \text{எக்ஸ் } \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ n \rightarrow \infty &= 0. \end{aligned}$$

எனவே, தேற்றம் 5 மூலம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடரின் உறுப்புகளின் மட்டு மதிப்பு குறைந்து கொண்டே போய் 0 கத்தழியை அடைவும் போது, n ஆவது உறுப்பு பூச்சியத்தை நெருங்குகிறது. \therefore கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குறி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 32:

$$1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.4} + \dots = \infty$$

என்ற தொடர் குறி தொடராக அல்லது விரி தொடராக?

$S_{2n} = 2n$ உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை எனக் கொண்டால்,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= \left(\sum_{1}^n u_n \right) - \left(\sum_{1}^n v_n \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{1}^n u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \text{ என்பது ஒரு விரி}$$

தொடராகும். (சோதனை 8-ல் படி 2-1)

$$\sum_1^n r_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

$$\therefore \sum \frac{1}{n(n+1)} < \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ ஒரு குவி தொடராகும்.}$$

$$\text{எனவே } \sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum r_n \text{ ஒரு குவி தொடராகும்.}$$

$$\therefore S_{2n} = \sum_1^n u_n = \sum_1^n r_n$$

$$= (\text{ஒரு விரி தொடர்}) \quad (\text{ஒரு குவி தொடர்})$$

$$\therefore \text{எக்லை } S_{2n} = \infty.$$

$$\text{மேலும், எக்லை } S_{2n+1} = \infty.$$

$$\text{ஏனெனில், } S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{(n+1)}$$

எனவே n ஒத்தைப்படை எண்ணுவினும் சரி அல்லது இரட்டைப்படை எண்ணுவினும் சரி, எக்லை $S_n = \infty$

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர் ஒரு விரி தொடராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 33 :

$$1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} \dots \infty \text{ இத் தொடரின் குவிவிரி தன்மையை அறிக.}$$

$1 = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$
 $\dots \dots$ என ஒரு எடுத்துக் கொண்டால்

$$u_0 = 1, u_1 = -x, u_2 = \frac{x^2}{2!} \dots \dots \dots$$

$$\therefore u_n = (-1)^n \frac{x^n}{n!}; u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \times -(-1)^n \cdot x^n \right|$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} |x|$$

$$= \frac{n^n}{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} |x| = \left(1 + \frac{1}{n}\right) |x|.$$

$$\text{எனவே } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \text{எனவே } \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} |x|$$

$$= |x|.$$

$|x| < 1$ ஆனால் அத்தொடர் ஓர் அடக்குமி தொடர்.
 எனவே குவி தொடராகும்.

$$|x| > 1 \text{ ஆனால் } |u_n| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } |u_n| &= \text{எனவே } \frac{|x|^n}{n!} \\ n \rightarrow \infty &= \infty. \end{aligned}$$

எனவே $|x| > 1$ க்குக் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு விரி
 தொடர் அல்லது அந் தொடர்.

$x = -1$ ஆனால் $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ ஒரு குறி தொடர்.

$x = \pm 1$ ஆனால் $\pm \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ஒரு குறி தொடர்.

$\therefore x = \pm 1$ ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு குறி தொடர்.

எடுத்துக்காட்டு 34 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}$$
 என்ற வத்தழித் தொடரின் குறிவீசி தன்

மையை ஆறீக.

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{\sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-1)^{n-1} \cdot x^n} \\ = \frac{(-1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot x$$

$$\therefore \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\text{எக்லீக } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$$

$\therefore |x| < 1$ ஆனால் $\sum u_n$ ஓர் அறக் குறி தொடர். எனவே ஒரு குறி தொடராகும்.

$$|x| > 1 \text{ ஆனால் } |u_n| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{எக்லீக } |u_n| = \text{எக்லீக } \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$$

$= \infty$

$\therefore \sum v_n$ ஒரு விரி தொடர்.

$x = 1$ ஆனால்

$$\sum v_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ என்பது ஒரு குவிதொடர்.}$$

$x = -1$ ஆனால்

$$\sum v_n = - \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ என்பது ஒரு விரி தொடர்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 35 :

$$1 - \frac{x}{1+a} + \frac{x^2}{1+2a} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{1+na} + \dots$$

என்ற தொடர் குவிதொடராக அல்லது விரிதொடராக மாறு அறிக.

$$v_{n+1} = \frac{(-1)^n x^n}{1+na}$$

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{1+(n-1)a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(-1)^n x^n}{1+na} \cdot \frac{1+(n-1)a}{(-1)^{n-1} x^{n-1}} \\ &= - \frac{1+(n-1)a}{1+na} \cdot x \end{aligned}$$

$$\text{எல்லா } n \rightarrow \infty : \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = |x|.$$

$\therefore |x| < 1$ ஆனால் $\sum v_n$ ஓர் அமக்குவி தொடர்; எனவே குவிதொடராகும்.

$|x| > 1$ ஆனால் $\sum |v_n|$ ஒரு விரிதொடராகும்.

$x = 1$ ஆனால்,

$$1 - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \dots$$

என்ற தொடரில்,

இ. க. - 81

$$\frac{1}{1+a} > \frac{1}{1+2a} > \frac{1}{1+3a} \dots$$

$$\therefore n_0 > n_{n-1}$$

$$\begin{array}{l} \text{எக்ஸ்} \\ n \rightarrow \infty \end{array} n_0 = \begin{array}{l} \text{எக்ஸ்} \\ n \rightarrow \infty \end{array} \frac{1}{1+(n-1)a} = 0.$$

$\therefore x = 1$ என்ற மதிப்பிற்கு $2n_0$ ஒரு குளி தொடராகும்.
 $x = -1$ என்ற மதிப்பிற்கு, கொடுத்துள்ள தொடர்

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} + \dots \text{ஆகும்.}$$

இது விதி தொடர் என்பதை $\sum \frac{1}{n}$ உடன் ஒப்பிட்டு அதை உண்.

பயிற்சி 3 (b)

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர்களின் குளி விதி அல்ல தன்மையை ஆறிக :

$$1. \sum \sqrt{\frac{5^{n+1}}{3^n + 4^n}}$$

$$8. \sum \frac{n!}{n}$$

$$2. \sum \frac{x^n}{n^2 + n}$$

$$9. \sum \frac{x^n}{n}$$

$$3. \sum a^{1/2n} x^n$$

$$10. \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n}$$

$$4. \sum \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$11. \sum \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$$

$$5. \sum \frac{1}{1+n^2 x^2}$$

$$12. \sum \frac{n x^n}{(n+1)(n+2)}$$

$$6. \sum \left(\frac{x^n}{n} \right)^2$$

$$13. \sum_1^\infty x^n \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$7. \sum \frac{n^2}{n^2 + 1} \cdot x^{n-1}$$

$$14. \sum \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$$

$$15. \sum \frac{16n^2 + 11n^4}{9n^2 + 14} x^2$$

$$23. \sum \sqrt{n^2 + n - n^2}$$

$$16. \sum \frac{x^2}{n^2 + 1}$$

$$24. \sum \left\{ \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^2} \right\}$$

$$17. \sum (-1)^{n+1} nx^{n-1}$$

$$25. \sum \frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)} x^n$$

$$18. \sum \frac{x^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$26. \sum \frac{n^2}{n^2 + 1} x^{n-1}$$

$$19. \sum \frac{1}{n(1+n^2)}$$

$$27. \sum \frac{(-1)^n \cdot n}{2n^2 + 3}$$

$$20. \sum \frac{1}{\sqrt{n^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$28. \sum (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$21. \sum \frac{1}{1+2x^2}$$

$$29. \sum \frac{n^2}{2^n + 1}$$

$$22. \sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$30. \sum \frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

3 (b). ஈருறுப்புத் தேற்றம், புக்குறித் தேற்றம், மடக்கைத் தேற்றம்—இவற்றின் தெரிப்புகள்

(Proof for the Binomial, Exponential and
Logarithmic Theorems)

தாம் முதல் பகுதியில் இம்மூன்று தொடர்களின் சில தன்மைகளையும், அவற்றின் மூலம் சில தொடர்களின் கூடுதல்களைக் காணும் முறைகளைப் பற்றியும் பார்த்தோம். ஆனால் அவைகளைத் தெரிப்பின்றி எடுத்துக்கொண்டு மேற் கூறியவைகளை இரண்டாவது, மூன்றாவது, நான்காவது அத்தியாயங்களில் பார்த்தோம். இப்பொழுது அத் தொடர்களின் தெரிப்புகளைப் பார்போம்.

ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம் (விதிமூலம் எண்களுக்கு) :

அறிமுகம் :

கத்தழித் தொடர்களில் குறிதல் தன்மை பற்றி ஓரளவு தம்முள் அத்தியாயங்களில் தெரித்து கொண்டோம். இனி இவ் வத்தியாயத்தில் ஒருவகைக் கத்தழித் தொடர்களின் தொகைகளைக் காண கருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தை எடுத்துக் கூறி மெய்ப்பாடு செய்வோம். இத் தேற்றம் இவற் கணிதத்தில் அடிப் படைத் தேற்றங்களில் ஒன்றாக விளங்குவதாகும். இத் தேற்றத்தின் தெரிப்பீற்று அடிப்படையால் விளங்கும் 'வாண்டர்மான்டி'க் தேற்றத்தையும் மெய்ப்பாடு செய்வோம்.

குறிவிடு :

தாம் $n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ எனத் பெருக்கத்தை n எனக் கொள்வோம். என்னு 'n' என்பது எந்த எண்ணையாகிலும் குறிக்கலாம். 'r' என்பது ஒரு தேர் மூலம் எண்ணைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{n_r}{r!} \text{ என்பதை } \binom{n}{r} \text{ எனக் குறிப்போம்.}$$

கவனிக்க :

$$nC_r = \binom{n}{r}, \quad n \text{ ஒரு தேர் மூலு எண்ணாகியிருப்பின்.}$$

1. வான்டர்மண்டியன் தேற்றம் :

" p, q என்ற இரு எண்கள் எவ்வெண்களாக இருப்பினும்

$$\begin{aligned} (p+q)_r &= p_r + \binom{r}{1} p_{r-1} q_1 + \binom{r}{2} p_{r-2} q_2 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{r}{s} p_{r-s} q_s + \dots + q_r" \end{aligned}$$

$$\text{சுருக்கம், } (p+q)_r = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} p_{r-s} q_s$$

என்று ' r ' ஒரு தேர் மூலு என.

மெய்யப்படு (தொகுத்ததி மூலம்) :

' r '-ன் ' m ' என்ற கீழ்ப்பிற்று மேற் கூறிய தேற்றம் உண்மை எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \therefore (p+q)_m &= p_m + \binom{m}{1} p_{m-1} q_1 + \binom{m}{2} p_{m-2} q_2 + \dots \\ &\quad \dots + \binom{m}{s} p_{m-s} q_s + \dots + q_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (p+q)_{m+1} &= (p+q)_m (p+q-m) \\ &= \left[p_m + \binom{m}{1} p_{m-1} q_1 + \binom{m}{2} p_{m-2} q_2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{m}{s} p_{m-s} q_s + \dots + q_m \right] (p+q-m) \\ &= p_m (\overline{p-m+q}) + \binom{m}{1} p_{m-1} q_1 (\overline{p-m+1} + \overline{q-1}) \\ &\quad + \binom{m}{2} p_{m-2} q_2 (\overline{p-m+2} + \overline{q-2}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{m}{s-1} p_{m-s+1} q_{s-1} (\overline{p-m+s-1} + \overline{q-s+1}) \\
& + \binom{m}{s} p_{m-s} q_s (\overline{p-m+s} + \overline{q-s}) + \dots + q_m (\overline{p} + \overline{q-m}) \\
& = p_m (\overline{p-m}) + \left\{ p_m q_1 + \binom{m}{1} p_{m-1} q_1 (\overline{p-m+1}) \right\} \\
& + \left\{ \binom{m}{1} p_{m-1} q_1 (\overline{q-1}) + \binom{m}{2} p_{m-2} q_2 (\overline{p-m+2}) \right\} \\
& + \dots + \left\{ \binom{m}{s-1} p_{m-s+1} q_{s-1} (\overline{q-s+1}) \right. \\
& \quad \left. + \binom{m}{s} p_{m-s} q_s (\overline{p-m+s}) \right\} + \dots + q_m (\overline{q-m}) \\
& = p_{m+1} + p_m q_1 \left\{ 1 + \binom{m}{1} \right\} \\
& \quad + p_{m-1} q_2 \left\{ \binom{m}{1} + \binom{m}{2} \right\} + \dots \\
& \quad + p_{m-s+1} q_s \left\{ \binom{m}{s-1} + \binom{m}{s} \right\} + \dots + q_{m+1} \\
& = p_{m+1} + p_m q_1 \binom{m+1}{1} + p_{m-1} q_2 \binom{m+1}{2} + \dots \\
& \quad + p_{m-s+1} \binom{m+1}{s} + \dots + q_{m+1} \\
& \quad [\text{By the binomial theorem}] \\
& = p_{m+1} + p_m q_1 \binom{m+1}{1} + p_{m-1} q_2 \binom{m+1}{2} + \dots \\
& \quad + p_{m-s+1} q_s \binom{m+1}{s} + \dots + q_{m+1} \\
& \quad \left[\because \binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right]
\end{aligned}$$

எனவே r -ன் n என்ற மதிப்பிற்று இத்தேற்றம் உண்மையாய் இருப்பின் r -ன் $n+1$ என்ற மதிப்பிற்கும் உண்மையாய் இருக்கின்றது.

$$(p+q)_1 = p+q = p_1 + q_1$$

$$(p+q)_2 = (p+q)(p+q-1) = p(p-1) + pq + q(q-1) + pq$$

$$= p_1 + 2pq + q_1 = p_1 + \binom{2}{1} p_1 q_1 + q_1.$$

எனவே நாம் கண்ட, கூற்றுப்படி, $r=3$ என்ற மதிப்பிற்கு இத் தேற்றம் உண்மையாய் இருக்கும். $r=3$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாய் இருப்பதாக $r=4$ என்ற மதிப்பிற்கும் உண்மையாய் இருக்க வேண்டும். இங்ஙனம் ஒவ்வொரு நிலையிலும் உண்மை யறித்து சென்றால் r -ன் பொதுவான கூட்டு ஐந்துபடிக்கு இத் தேற்றம் உண்மை என்பது தெளிவாகின்றது.

ஐந்துபடிச் சேர்க்கைத் தேற்றம் :

" n " என்பது ஏதாவதொரு விகிதமுறு எண்ணுயின்

$$1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{r} x^r + \dots$$

என்ற தொடரானது $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் $(1+x)$ -ன் கூட்டு மெய் மதிப்பிற்குச் சமம்.

தெரிப்பு :

$$f(n) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r \text{ என்க.}$$

p, q என்ற இரு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore f(p) = \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} x^r \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$f(q) = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} x^r \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{மேலும் } f(p+q) = \sum_{r=0}^n \binom{p+q}{r} x^r \quad \dots \quad (8)$$

(1), (2), (3)-இல் மூன்றாம் தொடர்களும் $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அந்வே குறியில் எப்பறத நிரூபித்துள்ளோம். இது அறக்குறி தொடர்களின் பெருக்கற் பணனும் கிடைக்கும் தொடர் ஓர் அறக்குறி தொடராகும். மேலும் அத்தொடரின் மதிப்பு எடுத்துக்கொண்ட இது தொடர்களின் மதிப்புகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம் என்ற தேற்றத்தின்படி,

(1), (2)-இயிலிரு தொடர்களின் பெருக்கலாக கிடைக்கும் தொடர் $f(p) \times f(q)$ எப்பறதற்குச் சமம்.

(1), (2) - இவைகளின் பெருக்கற் பணி

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \binom{p}{r} + \binom{p}{r-1} \binom{q}{1} + \dots + \binom{p}{r-s} \binom{q}{s} + \dots + \binom{q}{s} \right\} x^r$$

எப்பறதாகும்.

எனவே,

$$f(p) \times f(q) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \binom{p}{r} + \binom{p}{r-1} \binom{q}{1} + \dots + \binom{p}{r-s} \binom{q}{s} + \dots + \binom{q}{s} \right\} x^r$$

ஆனும் வரிசைப்பாணியைத் தேற்றப்படி,

$$(p+q)_r = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} p_{r-s} q_s$$

$$\therefore \binom{p+q}{r} = \frac{(p+q)_r}{r!} = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \frac{p_{r-s} q_s}{r!}$$

$$= \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \binom{p}{r-s} \binom{q}{s} \times \frac{(r-s)!}{s!} s!$$

$$= \sum_{s=0}^r \binom{p}{r-s} \binom{q}{s}$$

$$\therefore f(p) \times f(q) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{p+q}{r} x^r$$

$$= f(p+q)$$

[(8) உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்குகிட்டு]

இதையொட்டி,

$f(p+q+r+s \dots) = f(p) \times f(q) \times f(r) \times f(s) \times \dots$
என்பதைக் காணலாம்.

$$f(n) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

$$\therefore f(1) = 1 + x.$$

(i) n ஒரு தேர் முழு எண்ணாகுமின்,

$$n = 1 + 1 + \dots n \text{ முறை}$$

$$\therefore f(n) = f(1 + 1 + \dots n \text{ முறை}) = f(1) \times f(1) \times \dots n \text{ முறை}$$

$$[\because f(p+q+\dots) = f(p) \times f(q) \times \dots]$$

$$\text{எனவே, } f(n) = [f(1)]^n = (1+x)^n.$$

$\therefore n$ ஒரு தேர் முழு எண்ணாகின்,

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n}{r} x^r.$$

(ii) n ஒரு தேர் விலெற்றது x ன் அறியுப்பின்,

$n = \frac{p}{q}$ என்க. n ன் ஒரு p, q என்பவை தேர் முழு எண்கள் (விதிதெற்ற எண்களின் விதிப்படி).

$$\begin{aligned}\therefore f\left(\frac{p}{q}\right) &\times f\left(\frac{p}{q}\right) \times \dots q \text{ முறை} \\ &= f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots q \text{ முறை}\right) \\ &= f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p)\end{aligned}$$

$$\therefore \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f(p) = (1+x)^p$$

இருபுறமும் q ஆகம் எடுக்க, $f\left(\frac{p}{q}\right) = (1+x)^{\frac{p}{q}}$ ஒரு கூட்டு முழு எண்]

$f\left(\frac{p}{q}\right)$ என்பது $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ ன் கூட்டு மெய் எதிர்த்துச் சமம்.

$$\therefore f(n) = (1+x)^n$$

(iii) n ஒரு குறை எண்ணுயிருப்பின் :

$n = -m$ என்க. n ன் ஒரு m என்பது ஒரு கூட்டு எண்.

$$\begin{aligned}\text{எனவே, } f(0) &= f(m-m) \\ &= f(m) \times f(-m)\end{aligned}$$

$$\text{ஆனால், } f(0) = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(-m) &= \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(1+x)^m} \\ &= (1+x)^{-m}\end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = (1+x)^n$$

எனவே (i), (ii), (iii) ஆகிய இம்மூன்று உண்மைகளை ஒன்று செய்துக் கீழ்க்கண்ட முறையின் உண்மையம் :

' n ' ஒரு விவிலிதமுதர எண்ணுபிரிப்பின்

$$1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots \text{ என்ற தொடர் } |x| < 1$$

என்ற கூட்டுப்பாட்டின் $(1+x)^n$ என்பதன் கூட்டு மெய்மதிப் பிற்குச் சமம்.

குறிப்பு: நிலை (ii)-ல் $(1+x)^{p/q}$ -ன் q மதிப்பின் குறை எண்களாகவும், ஒப்பனை எண்களாகவும் கூட இருக்கலாம்.

ஆனால், $f\left(\frac{p}{q}\right)$ ஒரு கூட்டு மெய்யெண். எனவே, $f\left(\frac{p}{q}\right)$

ஆனது $(1+x)^{p/q}$ -ன் கூட்டு மெய் மதிப்பிற்குச் சமம்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S என்ற குறிப்பிடுக.

$$\therefore S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$$

இதை,

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+r-1q)}{r} \left(\frac{x}{q}\right)^r$$

என்ற வடிவத்திற்குக் கொண்டு வருவோம்.

$$\therefore S = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} p = 1 \\ p + q = 4 \end{array} \right\} ; \frac{x}{q} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore q = 3, \quad x = \frac{3}{4}$$

எனவே,

$$S = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{-1} = 4^{\frac{1}{2}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\frac{8}{18} + \frac{8.7}{18.24} + \frac{8.7.11}{18.24.30} + \dots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S எனக் குறிக்க.

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{8}{18} + \frac{8.7}{18.24} + \frac{8.7.11}{18.24.30} + \dots \\ &= \frac{8}{8 \cdot 3} + \frac{8.7}{8 \cdot 4} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8.7.11}{8 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

இத்தொடர் தமக்கு வேண்டிய வடிவத்தில் இல்லை. பெருக்கியும், கூட்டியும் இதை விரும்பிய வடிவில் கொண்டுவரலாம்.

$$\begin{aligned} \frac{S}{1 \cdot 2} &= \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{8.7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &\quad + \frac{8.7.11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{8}{3!} \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{8.7}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &\quad + \frac{8.7.11}{5!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{8}{3!} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8.7}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{8.7.11}{5!} \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots \end{aligned}$$

(அதாவது)

$$\begin{aligned} \frac{S}{72} &= \frac{8}{3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{8.7}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &\quad + \frac{8.7.11}{5!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots \end{aligned}$$

(அதாவது)

$$\frac{S}{72} \times (-5)(-1) = \frac{(-5)(-1) \cdot 3}{3!} \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$+ \frac{(-5)(-1) \cdot 3 \cdot 7}{4!} \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \dots$$

(அதாவது)

$$\frac{5S}{72} + 1 + \frac{(-5)}{1!} \left(\frac{1}{5}\right) + \frac{(-5)(-1)}{2!} \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$+ \frac{(-5)(-1)(3)}{3!} \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots$$

வரம்பக்கத்தில் உள்ள தொடரை இப்பொழுது

$$(1-x)^{-p/q} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p(p+q)(p+2q)\dots(p+r-1q)}{r!} \left(\frac{x}{q}\right)^r$$

என்பதொரு ஒப்பீட்டுப் பாக்கியாகும்.

ஆய்வனம் பாக்கிகள்,

$$\left. \begin{array}{l} p = -5 \\ p+q = -1 \end{array} \right\}; \quad \frac{x}{q} = \frac{1}{5}.$$

$$\therefore q = 4, \quad x = \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{5S}{72} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-\left(\frac{-5}{4}\right)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore S = \frac{72}{5} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}} - 1 + \frac{7}{6} - \frac{5}{72} \right]$$

$$1 - \frac{5}{6} + \frac{5}{72}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$\frac{1}{24} - \frac{1 \cdot 2}{24 \cdot 32} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 32 \cdot 40} - \dots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகையை S என்க.

எனவே,

$$S = \frac{1}{24} - \frac{1 \cdot 2}{24 \cdot 32} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 32 \cdot 40} - \dots$$

இத் தொடரில் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுவிட்டு ஒன்று மாற்றக் குறியீடு பெற்று வருவதைக் கவனிக்க. எனவே நாம் (8) ஆம் பிரிவில் உள்ள $(1+x)^{-1/2}$ -ன் விரிவத்தோடு இத் தொடரை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க வேண்டும்.

இப்பொழுது,

$$S = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots$$

இது நமக்கு வேண்டிய வடிவத்தில் இல்லை. நமக்கு வேண்டிய வடிவிக்கு நமக்குத் தெரிந்த முறைகளால் இதைக் கொண்டுவராம்.

எனவே,

$$\frac{S}{1 \cdot 2} = \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{8} \right) - \frac{1 \cdot 2}{4!} \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{6!} \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots$$

அதாவது

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^2 &= \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{8} \right)^2 - \frac{1 \cdot 2}{4!} \left(\frac{1}{8} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{6!} \left(\frac{1}{8} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{அதாவது } \frac{S}{128} &= \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{8} \right)^2 - \frac{1 \cdot 2}{4!} \left(\frac{1}{8} \right)^3 \\ &\quad + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{6!} \left(\frac{1}{8} \right)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{S}{128} = -\frac{1}{8!} \left(\frac{1}{8}\right)^8 + \frac{1.8}{4!} \left(\frac{1}{8}\right)^4 \dots$$

$$\therefore -\frac{S}{128} \times (-8)(-1) = -\frac{(-8)(-1)(1)}{8!} \left(\frac{1}{8}\right)^8 \\ + \frac{(-8)(-1)(1)(8)}{4!} \left(\frac{1}{8}\right)^4 \dots$$

$$\therefore -\frac{8}{128} S + 1 = \frac{(-8)}{1!} \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{(-8)(-1)}{2!} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ = 1 - \frac{(-8)}{1!} \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{(-8)(-1)}{2!} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ - \frac{(-8)(-1)(1)}{3!} \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots$$

இப்பொழுது தாம் வரப் பக்கத்திலிருக்கும் தொடரை
(1+x)^{-8/8} என்பதன் விரிவத்தோடு ஒப்பிடலாம்.

ஒப்பிட்டுப் பார்க்கின்,

$$\left. \begin{aligned} p &= -8 \\ p+q &= (-1) \\ \frac{x}{q} &= \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \therefore \begin{aligned} q &= 8 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

எனவே

$$-\frac{8S}{128} + 1 + \frac{8}{8} + \frac{8}{128} = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{-(-8)} \\ = \left(\frac{5}{4}\right)^8$$

$$\therefore S = -\frac{128}{8} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^8 - 1 - \frac{8}{8} - \frac{8}{128} \right] \\ = -\frac{128}{8} \left[\frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{-48-128-8}{128} \right]$$

$$= -\frac{128}{3} \left[\frac{6\sqrt{6}}{8} - \frac{179}{128} \right]$$

$$= \frac{1}{3} (179 - 80\sqrt{6})$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகை

$$\frac{1}{3} (179 - 80\sqrt{6}) \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1.3^2}{2.4} - \frac{1}{2^2} + \frac{1.3.5^2}{2.4.6} - \frac{1}{2^3} + \dots$$

என்ற தொடரின் தொகை காண்க.

கொடுக்கப்பட்டத் தொடரின் தொகையை S என்க.

$$\therefore S = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1.3^2}{2.4} - \frac{1}{2^2} + \frac{1.3.5^2}{2.4.6} - \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1^2}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1.3^2}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$- \frac{1.3.5^2}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} (2-1) \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1.3}{2!} (2.2-1) \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$- \frac{1.3.5}{3!} (2.2-1) \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{2}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1.3.2.2}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$- \frac{1.3.5.2.2}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots$$

$$+ \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{1.3}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^4$$

$$+ \frac{1.3.5}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1.2}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1.2.5}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^6 - \dots \right] \\
 &\quad + \left[\frac{1}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1.2}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1.2.5}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^6 - \dots \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{4} + 2 \left[\frac{2}{1!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \frac{2.5}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^6 + \dots \right] \\
 &\quad - \left[-\frac{1}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1.2}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1.2.5}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots \right] \\
 &= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times 2 \left[\frac{2}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) - \frac{2.5}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots \right] \\
 &\quad - \left[1 - \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1.2}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1.2.5}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots \right] \\
 &\quad + 1 \\
 &= \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \times 2 \left[-\frac{2}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{2.5}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \dots \right] \\
 &\quad - \left[1 - \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1.2}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1.2.5}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots \right] \\
 &= \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \times 2 \left[1 - \frac{2}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{2.5}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \dots \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} - \left[1 - \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1.2}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1.2.5}{3!} \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots \right] \\
 &= 2 - \frac{1}{4} \times 2 \left[1 - \frac{2}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{2.5}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \dots \right] \\
 &\quad - \left[1 - \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1.2}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \dots \right] \\
 &= 2 - \frac{1}{4} \times 2 S_1 - S_2.
 \end{aligned}$$

$$\text{எனவே } S_1 = 1 - \frac{8}{11} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{8 \cdot 8}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \dots \quad (a)$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{4} \right) + \frac{1 \cdot 8}{2!} \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \dots \quad (b)$$

(a)-ன் வலக்கனகப் புறத்தில் உள்ள தொடரை $(1+x)^{-8}$ க் கிரீவத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது

$$p = 8$$

$$p + q = 8$$

$$\frac{x}{q} = \frac{1}{4} \quad \therefore q = 2, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_1 = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{-8} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-8}$$

இதுபோலவே (b)-ன் வலப் புறத்தை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்

$$\begin{array}{l} p = 1 \\ p + q = 8 \\ x = \frac{1}{4} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} q = 2 \\ \\ x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\text{எனவே, } S_2 = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= 2 - \frac{2}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \\ &= 2 - \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} + 1 \right] \\ &= 2 - \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \right] \\ &= 2 - \left(\frac{2}{3} \right)^{-1} \left[\frac{4}{3} \right] \\ &= 2 - \frac{4 \sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் கூட்டுத் தொகை
 $\frac{2 - 4 \sqrt{e}}{9}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$(2-x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ ஐ x -ன் அடுக்கங்களில் விரித்தெழுதுக.

$$\begin{aligned} (2-x+x^2)^{\frac{1}{2}} &= 2^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{x}{2} (x-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} (x-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)}{2!} \cdot \frac{x^2}{4} (x-1)^2 + \dots \right] \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{32} + \dots \right] \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{x}{6} + \frac{5x^2}{32} + \dots \right] \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)^{-1}$ -ன் விரிவத்தில் x^r -ன் கெழு
 $\frac{1}{6} (r+1)(r+2)(r+3)$ என்று காட்டுக.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = (1-x)^{-2}$$

எனவே,

$$\begin{aligned} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)^{-2} &= (1-x)^{-4} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right\} x^r \end{aligned}$$

எனவே,

$$\begin{aligned} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)^{-2} \text{-ன் விரிவத்தில் } x^r \text{-ன் கெழு} \\ = \frac{1}{6} (r+1)(r+2)(r+3) \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}$ என்ற எளிப்பின் x -ன் அடுக்கங்களில் விரித்தெழுத.

$$\frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}$$

$$\therefore A = \frac{1}{1-\frac{3}{2}} \quad \& \quad B = -\frac{1}{1-\frac{2}{3}}$$

$$A = -2 \quad \& \quad B = 3$$

$$\therefore \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = -\frac{2}{1-2x} + \frac{3}{1-3x}$$

$$= -2(1-2x)^{-1} + 3(1-3x)^{-1}$$

$$= -2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n \right]$$

$$+ 3 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n \right]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [3^{n+1} - 2^{n+1}] x^n$$

$(1-2x)^{-1}$ ஐ சுருதுப்புத் தேற்றத்தின் கூற்றுப்படி $|2x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்தான் விரிக்க முடியும்.

இதையே போலவே $(1-3x)^{-1}$ ஐ $|3x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்தான் விரிக்க முடியும்.

எனவே, $|x| < \frac{1}{2}$, $|x| < \frac{1}{3}$ என்று x இருத்தால்

$(1-2x)^{-1}$ ஐயும் $(1-3x)^{-1}$ ஐயும் சுருதுப்புத் தேற்றப்படி விரிக்கலாம்.

$|x| < \frac{1}{2}$ என்ற கட்டுப்பாடு, $|x| < \frac{1}{8}$ என்ற இருக்கும் பொது கட்டுப்பாடுகின்றது. ஆனால் $|x| < \frac{1}{2}$ என்ற கட்டுப்பாடு $|x| < \frac{1}{8}$ என்ற இருக்கும்பொது இராது. எனவே, $|x| < \frac{1}{8}$ என்ற இருக்கும்பொது $\frac{1}{1-2x}$ ஐயும், $\frac{1}{1-8x}$ ஐயும் விரித்தெழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\frac{2-8x}{1-8x+2x^2}$ ஐ விரித்தெழுதி x^2 -ன் கெழுவினைக் காண்க.

$$\frac{2-8x}{1-8x+2x^2} = \frac{2-8x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

(பகுதிப் பிரிவாக்கம்)

$$= (1+x+x^2+\dots) + (1+(2x) + (2x)^2 + \dots)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1+2^n)x^n.$$

எனவே x^2 -ன் கெழு $1+2^2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \text{ ஐ } x\text{-ன் அடுக்கங்களில் விரித்தெழுதுக.}$$

தீர்வு. $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கின்றது.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} &= \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{1+x - (1-x)} \\ &= \frac{1}{2x} \{1+x + (1-x) - 2\sqrt{1-x^2}\} \\ &= \frac{1}{2x} \{2 - 2\sqrt{1-x^2}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \{1 - \sqrt{1-x^2}\} \\
&= \frac{1}{x} \left[1 - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{8}\right)x^4 - \left(\frac{1}{8}\right)x^6 + \dots \right\} \right] \\
&= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^6 - \dots \right] \\
&= \frac{1}{x} \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8} + \frac{3x^6}{24} + \dots \right] \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8} + \frac{3x^5}{24} + \dots
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

' n ' $4r$ ஆகவது $4r+1$ என்ற இருக்கும்போது $\frac{1}{1-x+x^2-x^3}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு 1 என்று காண்க. மேலும் ' n ', $4r+2$ ஆகவது $4r+3$ என்று இருக்கும்போது $\frac{1}{1-x+\dots-x^3}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு 0 என்று நிரூபிக்க.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x+x^2-x^3} &= \frac{1+x}{1-x^4} = (1+x) \sum_{r=0}^{\infty} x^{4r} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} x^{4r} + \sum_{r=0}^{\infty} x^{4r+1}
\end{aligned}$$

எனவே ' n ', $4r$ ஆகவது $4r+1$ ஆக இருக்கும் போது x^n -ன் கெழு 1 என்பதைக் காண்டு கொள்ளலாம். ஆனால், ' n ' $4r+3$ ஆக இருக்கும்போது நாம் காண்ட விரிவத்தில் x^n உறுப்பு இல்லாமை நோக்கலாம். எனவே ' n ', $4r+2$ ஆகவது $4r+3$ ஆக இருக்கும் போது x^n -ன் கெழு '0' ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\frac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3}$ -ன் விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு n^2+1 என்று இருக்க a, b, c என்ற எண்களின் மதிப்பை ஆராய்.

$$\begin{aligned} \frac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3} &= (a+bx+cx^2)(1-x)^{-3} \\ &= (a+bx+cx^2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2} x^r \\ &= a \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2} x^r + b \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2} x^{r+1} \\ &\quad + c \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2} x^{r+2} \end{aligned}$$

x^0 -ன் கெழு = $a+0$

$$x^1\text{-ன் கெழு} = a \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + b \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$$

$$x^2\text{-ன் கெழு} = a \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + b \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} + c \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$$

ஆனால் x^0 -ன் கெழு n^2+1 என்று இருக்க வேண்டும்.

ஆதலால் x^1 -ன் கெழு 1 என்று இருக்க வேண்டும்.

x^2 -ன் கெழு 2 என்று இருக்க வேண்டும்.

x^3 -ன் கெழு 5 என்று இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \left. \begin{aligned} a &= 1 \\ 3a+b &= 2 \\ 6a+3b+c &= 5 \end{aligned} \right\} \quad \therefore \begin{aligned} b &= -1 \\ c &= 5+3-6 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{எனவே} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

என இருக்க வேண்டும்.

சமபடிப் பெருக்கங்கள் (Homogeneous product)

a, b என்ற எண்களைக் கொண்டு நாம்

a^3, a^2b, ab^2, b^3 என்ற மூர்ப்படிப் பெருக்கங்கள்,

$a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$ என்ற நார்ப்படிப் பெருக்கங்கள்,

... ..

... ..

$a^r a^{r-1}b, a^{r-1}b^2, \dots, a b^{r-1}, b^r$ என்ற r சமபடிப் பெருக்கங்களை அமைக்கலாம்.

$a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$ என்பவைகள் a, b என்ற இரண்டு எண்களைக்கொண்டு அமைக்கப்பட்ட நார்ப்படிப் பெருக்கங்கள் என்று குறிப்பிட ${}_5H_4$ என்று எழுதுகிறோம். இதன் எண்ணிக்கை 5 ஆகும். எனவே,

$${}_5H_4 = 5 \text{ என எழுதலாம்.}$$

பொதுவாக, n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட r சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை ${}_nH_r$ ஆகும்.

தேற்றம் :

n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கக் கூடிய r சமபடிப் பெருக்கங்களின் எண்ணிக்கை,

$${}_nH_r = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{r!} \text{ ஆகும்.}$$

தெரிவு :

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ என்ற n இராசிகளை எடுத்துக் கொண்டால்,

$$(1 + a_1 x + a_1^2 x^2 + \dots) (1 + a_2 x + a_2^2 x^2 + \dots) \dots (1 + a_n x + a_n^2 x^2 + \dots)$$

$$= 1 + S_1 x + S_2 x^2 + \dots + S_r x^r + \dots \text{ என எழுதலாம்.}$$

இங்கு $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ என்ற n இராசிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட r சமபடிப் பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையை S_r என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_r = 1$ என எரு செய்வதால் S_r -ல் r -கள் உறுப்புக்களில் எண்ணிக்கை தங்குத் கிடைக்கும். அதாவது ${}_rH_r$ -ன் மதிப்புத் கிடைக்கும்.

$$\therefore (1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots) \\ \dots \dots (1+x+x^2+\dots) \quad [r \text{ முறைகள்}].$$

$$= 1 + {}_rH_1 x + {}_rH_2 x^2 + \dots + {}_rH_r x^r + \dots \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore {}_rH_r = (1+x+x^2+\dots+x^r)^r$ -ல் உள்ள x^r -ன் கெழு வாகும்.

அதாவது ${}_rH_r = [(1-x)^{-1}]^r$ -ல் உள்ள x^r -ன் கெழு வாகும்.

$= (1-x)^{-r}$ -ல் உள்ள x^r -ன் கெழு வாகும்.

$$= \left[1 + rx + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \right. \\ \left. + \dots + \frac{r(r+1)(r+2) \dots (r+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} x^r + \dots \dots \right] \\ \text{-ல் } x^r\text{-ன் கெழு வாகும்.}$$

$$\therefore {}_rH_r = \frac{r(r+1)(r+2) \dots (r+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \\ = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (r+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} = {}^{r+r-1}C_r$$

எடுத்துக்காட்டு :

தங்கு தாயக் கட்டைகளில் ஒவ்வொன்றின் ஆறு முகங்களிலும் (0, 1, 2, 3, 4, 5) என்ற எண்கள் பொறிக்கப்பட்டிருக்கின்றன. அவைகளை ஒரே சமயத்தில் உருட்டினால் எத்தனை விதங்களில் மொத்தம் 15 கிடைக்கும்?

தங்கு கட்டைகளும் காட்டும் எண்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என எடுத்துக்கொண்டால், $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$ என்ற சமன்பாடு எத்தனை விதங்களில் பொருத்துமோ அத்தனை விதங்களில் 15 கூட்டுத் தொகையாகக் கிடைக்கும்.

எனவே சமன்பாடு பெருக்கல்களின் தேற்றத்தின்படி, தாம், $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$ என்ற தரங்கு கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையில் x^{12} -ஐ கெழுமவக் காணலாம்.

∴ $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2$ -ல் x^{12} -ன் கெழு.

$$= \left(\frac{1-x^6}{1-x} \right)^2 \text{-ல் } x^{12} \text{-ன் கெழு}$$

$$= (1-x^6)^2 (1-x)^{-2} \text{-ல் } x^{12} \text{-ன் கெழு.}$$

$$\begin{aligned} &= (1 - 4x^6 + 6x^{12} - 4x^{18} + x^{24})(1 + 4x \\ &\quad + \frac{4.5}{1.2}x^2 + \frac{4.5.6}{1.2.3}x^3 + \frac{5.6.7}{1.2.3}x^4 + \dots \\ &\quad + \frac{10.11.12}{1.2.3}x^5 + \dots + \frac{16.17.18}{1.2.3}x^{12} \\ &\quad + \dots) \text{-ல் } x^{12} \text{-ன் கெழு.} \end{aligned}$$

$$= \frac{16.17.18}{1.2.3} - 4 \cdot \frac{10.11.12}{1.2.3} + 6 \cdot \frac{4.5.6}{1.2.3}$$

$$= 816 - 580 + 120$$

$$= 356.$$

படிக்குறித்தேற்றம் (The Exponential Theorem)

தேற்றம் 1 :

x ஏதாவது ஒரு பெர்மெனென்சு இரப்பின் $x \neq 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்கீணாக,

$$\begin{aligned} \text{எனில் } \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n &= e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} \\ &\quad + \frac{x^3}{6} + \dots \infty. \end{aligned}$$

தேர்வு :

n மிகப் பெரியதாக இருப்பின், $\left| \frac{x}{n} \right| < 1$ -ஐக் கருதுவது தேற்றத்தின் மூலம்,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{\underline{1}} \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{\underline{2}} \left(\frac{x}{n}\right)^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{3}} \left(\frac{x}{n}\right)^3 + \dots \dots \\ &= 1 + \frac{x}{\underline{1}} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\underline{2}} \cdot x^2 \\ &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\underline{3}} x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{எக்ஸ் } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= \text{எக்ஸ் } \left[1 + \frac{x}{\underline{1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\underline{2}} x^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\underline{3}} x^3 + \dots \infty \right] \\ &= 1 + \frac{x}{\underline{1}} + \frac{x^2}{\underline{2}} + \frac{x^3}{\underline{3}} + \dots \infty \\ &= e^x \text{ என்று குறிப்பிடுகிறோம்.} \end{aligned}$$

$x = 1$ ஆனால்,

$$\begin{aligned} \text{எக்ஸ் } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{\underline{1}} + \frac{1}{\underline{2}} + \frac{1}{\underline{3}} \\ &\quad + \dots \dots \infty = e, \\ e &= 1 + \frac{1}{\underline{1}} + \frac{1^2}{\underline{2}} + \frac{1^3}{\underline{3}} + \dots \infty \end{aligned}$$

என்ற தொடரையே நாம் படிக்குறித் தொடர் என்று அழைக்கிறோம்.

தேற்றம் 2 :

படிக்குறித் தேற்றம்.

x -ன் எல்லா விகிதமுறு பெரியெண் மதிப்புகளுக்கு

$$e^x = 1 + \frac{x}{\underline{1}} + \frac{x^2}{\underline{2}} + \frac{x^3}{\underline{3}} + \dots \infty \text{ என்பதே படிக்குறித் தேற்றமாகும்.}$$

தெரிப்பு:

$$f(m) = 1 + \frac{m}{\underline{1}} + \frac{m^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{m^r}{\underline{r}} + \dots \infty,$$

$$f(n) = 1 + \frac{n}{\underline{1}} + \frac{n^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{n^r}{\underline{r}} + \dots \infty,$$

$$f(m+n) = 1 + \frac{(m+n)}{\underline{1}} + \frac{(m+n)^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{(m+n)^r}{\underline{r}} + \dots \infty$$

இத்தொடர்கள் m, n -ன் செய்யை மதிப்புகளுக்கு அறவும் குறித் தொடர்களாகும்.

$f(m), f(n)$ - இவ்விதன்⑤ தொடர்களின் பெருக்கல் பலனைக் காண்போம்.

$$f(m) \times f(n) =$$

$$\left[1 + \frac{m}{\underline{1}} + \frac{m^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{m^r}{\underline{r}} + \dots \infty \right] \\ \times \left[1 + \frac{n}{\underline{1}} + \frac{n^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{n^r}{\underline{r}} + \dots \infty \right]$$

$$\therefore f(m) \times f(n) =$$

$$1 + \left[\frac{m}{\underline{1}} + \frac{n}{\underline{1}} \right] + \left[\frac{m^2}{\underline{2}} + \frac{m}{\underline{1}} \cdot \frac{n}{\underline{1}} + \frac{n^2}{\underline{2}} \right] \\ + \dots + \left[\frac{m^r}{\underline{r}} + \frac{m^{r-1}}{\underline{r-1}} \cdot \frac{n}{\underline{1}} + \frac{m^{r-2}}{\underline{r-2}} \cdot \frac{n^2}{\underline{2}} \right. \\ \left. + \dots + \frac{n^r}{\underline{r}} \right] + \dots$$

இத்தொடரும் ஒரே அறவும் குறித்தொடர் என்பதைக் கீழ்க்கண்ட தொடர் குறிதலும் விதிதலும் என்ற அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம்.

$(r+1)$ ஆவது உறுப்பு =

$$\left[\frac{m^r}{\underline{r}} + \frac{m^{r-1}}{\underline{r-1}} \cdot \frac{n}{\underline{1}} + \frac{m^{r-2}}{\underline{r-2}} \cdot \frac{n^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{n^r}{\underline{r}} \right]$$

$$= \frac{1}{r} \{ m^r + {}^rC_1 m^{r-1} n + {}^rC_2 m^{r-2} n^2 + \dots + n^r \}.$$

$$= \frac{1}{r} (m+n)^r$$

$$= f(m+n)-\text{அ } (r+1) \text{ ஆவது உறுப்பு.}$$

எனவே $f(m) \times f(n)$ -அ ஒத்தவேரே உறுப்பும் $f(m+n)$ -அ சமமாகும்.

$$\therefore f(m) \times f(n) = f(m+n).$$

$$\text{அதேவேராக } f(m) \times f(n) \times f(l) = f(m+n+l)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$\therefore f(m) \times f(n) \times f(l) \dots = f(m+n+l+\dots)$$

(i) x ஒரு கூட்டு முழு எண்.

$$m = n = l = \dots = 1 \text{ என்கும்}$$

$$f(m) \times f(n) \times f(l) = x \text{ உறுப்புகள் வரை } = f(m+n+l \dots)$$

$$\text{அதாவது } f(1) \times f(1) \times f(1) \dots = f(1+1+1+\dots x \text{ நடவகைகள்}).$$

$$\therefore [f(1)]^x = f(x).$$

$$\therefore e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots \dots \infty$$

(ii) x ஒரு குறை முழு எண்.

$$x = -p \text{ என்கும் } p \text{ ஒரு கூட்டு முழு எண்ணாக இருக்கும்}$$

$$\therefore f(p) \times f(-p) = f(p-p) = f(0) = 1.$$

$$\therefore f(-p) = \frac{1}{f(p)} = \frac{1}{e^p} = e^{-p}$$

$$\therefore f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots \infty.$$

(iii) x ஒரு வீதிமுறை கூட்டு அல்லது குறை எண்.

$x = \frac{p}{q}$ (p கூட்டு அல்லது குறை முழு எண், q கூட்டு முழு எண்).

$$\begin{aligned}\therefore f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \times f\left(\frac{p}{q}\right) \dots q \text{ உறுப்புகள்} \\ = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} \dots q \text{ தடவைகள்}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p).$$

$$\therefore \left[f\left(\frac{p}{q}\right)\right]^q = e^p.$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = [e^p]^{1/q} = e^{p/q}$$

$$\therefore f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots \infty$$

படிக்குறி 'e'-ன் எல்லை :

$$\text{எல்லை } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

தலை i: n ஒரு கூட்டு எண்ணாக இருக்கட்டும்.

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1) \dots (n-n+1)}{1 \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

n கூட்டு எண். எனவே $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன. மேலும் n -ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையும், அவற்றின் மதிப்புகள் மூன்றாவது உறுப்பிலிருந்து அதிகரிக்கிறது.

எனவே $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -ம் குறுகிக்கும். ஒத்தினை உறுப்பி கூட்டு மதிப்புடையவை.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

என்ற தொடருடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கலாம்,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.$$

$$\therefore \text{எல்லா } n \rightarrow \infty \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{ஒரு திட்டமான எண்ணாகும்} = e$$

என்று ஒப்பிடுகிறோம்.

நிலை ii: n ஒரு கூட்டு பின்னம், எனவே $p < n < p + 1$ எனக் காண்போம்.

$$\frac{1}{p+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{p}.$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{p+1} < 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{p}.$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1};$$

$$n \rightarrow \infty \text{ ஆனால் } p, p+1 \rightarrow \infty.$$

$$\text{எல்லா } p \rightarrow \infty \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p = \frac{\text{எல்லா } p \rightarrow \infty \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{\text{எல்லா } p \rightarrow \infty \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)} = e$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right] \\
 &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\
 &= e \cdot 1 \quad (\text{நிலை i-ன் மூலம்}).
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

நிலை iii: n ஒரு குறை எண். $n = -m$ என்று கொள்வோம். $m > 0$ என்க.

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} \\
 &= \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{m-1}{m}\right)^n} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^n \\
 &= \left[1 + \frac{1}{m-1}\right]^n \\
 &= \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^n \times \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)
 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ எனில் $m-1 \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{(m-1) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \\
 &\quad \times \lim_{(m-1) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) \\
 &= e \cdot 1 \quad [\because \text{நிலை i, ii மூலம்}]
 \end{aligned}$$

n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ஆகும்.

அதிபரவணச் சார்புகள் (Hyperbolic functions) :

$\frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ என்ற சார்பை $\cosh x$ என்றும்

$\frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ என்ற சார்பை $\sinh x$ என்றும் குறிப்பிடுகிறோம்.

இத்தச் சார்புகள் அதிபரவணச் சார்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ ஆகும்.}$$

ஒரு உத்தமழித் தொடரில் $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{[n]}$ என்று கொடுக்கப்

பட்டு, தனக்கு n ஆவது உறுப்பு ஈட்டும் தெரியுமாகில் அத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை காணல் :

$$f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + \dots \dots \dots + a_r n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

என்பது r படியுள்ள n -ன் கோவைவாரும். இதில் $a_0, a_1, a_2, \dots \dots a_r$ என்பவைகளாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$n \text{ ஆவது உறுப்பு} = f(n) \frac{x^n}{[n]}$$

$$= [a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + a_3 n(n-1)(n-2) + \dots + a_r n(n-1) \dots (n-r+1)] \frac{x^n}{[n]}$$

$$= a_0 \frac{x^n}{[n]} + a_1 x \frac{x^{n-1}}{[n-1]} + a_2 x^2 \frac{x^{n-2}}{[n-2]} + \dots$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{[n]} = a_0 \sum \frac{x^n}{[n]} + a_1 x \sum \frac{x^{n-1}}{[n-1]}$$

$$+ a_2 x^2 \sum \frac{x^{n-2}}{[n-2]} + \dots \dots \dots$$

$$+ a_r x^r \sum \frac{x^{n-r}}{[n-r]}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_0 e^x + a_1 x \cdot e^x + a_2 x^2 e^x + \dots + a_r x^r e^x \\
 &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r) e^x
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$\frac{1^2 \cdot 2^2}{1} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3} + \dots \infty \text{ என்பத}$$

தொடரின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$I_n = n \text{ ஆவது உறுப்பு} = \frac{n^2 (n+1)^2}{n} = \frac{n (n+1)^2}{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{n (n+1)^2}{n-1} &= \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n-2} \\
 &+ \left[\frac{C}{n-3} + \frac{D}{n-4} \right] \text{ ஆக.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n (n+1)^2 &= A + B(n-1) + C(n-1)(n-2) \\
 &+ D(n-1)(n-2)(n-3)
 \end{aligned}$$

இதன் மூலம் $A = 4, B = 14, C = 8, D = 1$.

$$\therefore I_n = \frac{4}{n-1} + \frac{14}{n-2} + \frac{8}{n-3} + \frac{1}{n-4}$$

$$\therefore I_1 = 4$$

$$I_2 = \frac{4}{1} + 14$$

$$I_3 = \frac{4}{2} + \frac{14}{1} + 8$$

$$I_4 = \frac{4}{3} + \frac{14}{2} + \frac{8}{1} + 1$$

$$I_5 = \frac{4}{4} + \frac{14}{3} + \frac{8}{2} + \frac{1}{1}$$

*** *** *** *** ***

*** *** *** *** ***

$$\begin{aligned}
 \therefore S_{\infty} &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 4 \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right. \\
 &\quad \left. + \dots \dots \right) + 14 \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots \right) \\
 &\quad + 8 \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots \right) \\
 &\quad + \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots \dots \right) \\
 &= 4e + 14e + 8e + e \\
 &= 27e.
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$$1.6 + \frac{2.6}{1} + \frac{3.7}{2} + \dots \dots \infty\text{-ல் கூட்டுத்தொகை காண்க.}$$

$$t_{n+1} = (n+1) \text{ ஆவது உறுதி} = \frac{(n+1)(n+5)}{n}$$

$$\therefore \frac{(n+1)(n+5)}{n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n-2}$$

$$(n+1)(n+5) = A + Bn + Cn(n-1) \text{ ஆகும்.}$$

இதில் திவு $A=5, B=7, C=1$. எனவே,

$$t_{n+1} = \frac{5}{n} + \frac{7}{n-1} + \frac{1}{n-2}$$

$$\therefore t_1 = 5$$

$$t_2 = \frac{5}{1} + 7$$

$$t_3 = \frac{5}{2} + \frac{7}{1} + 1$$

$$t_4 = \frac{6}{12} + \frac{7}{12} + \frac{1}{12}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\infty} &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1} = 6 \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots \right) \\ &\quad + 7 \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots \right) \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots \right) \\ &= 6e + 7e + e \\ &= 13e. \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

n மீதம் பெரியதாக இருப்பின்,

$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} \right)$ (Goursat) என
நிலைவு.

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^{n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \text{ ஆகும்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e^{n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= e^{n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots \right)} \\ &= e^{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \dots} \\ &= e \cdot e^{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \dots} \end{aligned}$$

$$= e \left[1 + \frac{\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} \dots \right)}{\underline{1}} + \frac{\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} \right)^2}{\underline{2}} + \dots \right]$$

$$= e \left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} \right] \text{ (Gartmann)}$$

எருதுப்புக்கட்டு 4 :

$$x^{n+1} = n(n-1)x^{n+1} + \frac{n(n-1)}{\underline{2}} (n-2)x^{n+1} - \dots (n+1)$$

உறுப்புகள்

$$= \frac{n}{\underline{1}} \mid (n+1) \text{ எருது கட்டுக.}$$

$$\text{இடக்கவையுறம்} = \mid n+1 \left[e^x - n \cdot e^{(n-1)x} \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)}{\underline{2}} e^{(n-2)x} + \dots (n+1) \text{ உறுப்புகள்} \right]$$

எருது வரிசையில் x^{n+1} -ன் கெடுவாகும்.

$$= \mid n+1 \mid e^{nx} \left[1 - {}^nC_1 e^{-x} + {}^nC_2 e^{-2x} - \dots \right.$$

... + (n+1) உறுப்புகள்]

எருது வரிசையில் x^{n+1} -ன் கெடுவாகும்.

$$= \mid n+1 \left[1 + \frac{nX}{\underline{1}} + \frac{n^2 X^2}{\underline{2}} + \dots \right]$$

$$\times \left[\frac{x}{\underline{1}} - \frac{x^2}{\underline{2}} + \dots \right]^n$$

எருது வரிசையில் x^{n+1} -ன் கெடுவாகும்.

$$= \mid n+1 \left(1 + \frac{nX}{\underline{1}} + \frac{n^2 X^2}{\underline{2}} \dots \right)$$

$$\times x^n \left(1 - \frac{x}{\underline{2}} \dots \right)$$

எருது வரிசையில் x^{n+1} -ன் கெடு.

$$= \mid n+1 \left(\frac{n}{\underline{1}} - \frac{n}{\underline{2}} \right) = \frac{n}{\underline{2}} \mid n+1$$

மேற்படிக்கோல் (ii) க்கு :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n} \cdot x^n = (1 + 2x + x^2) e^x \text{ எனக் கொள்.}$$

$$\frac{(n+1)^2}{n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n-2}$$

$$\therefore (n+1)^2 = A + Bn + C(n-1).$$

இதைத் தீர்வு செய்வோம்.

$$A = 1, B = 2, C = 1$$

$$\therefore \frac{(n+1)^2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n-2}$$

$$t_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n} \cdot x^n = \frac{1}{n} \cdot x^n + \frac{2}{n-1} x^n + \frac{1}{n-2} x^n$$

$$\therefore t_{n+1} = \frac{x^n}{n} + 2x \cdot \frac{x^{n-1}}{n-1} + x^2 \cdot \frac{x^{n-2}}{n-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} \\ &\quad + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \end{aligned}$$

$$= e^x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

$$= e^x (1 + 2x + x^2)$$

மேல்க்கொடுக்கோல் (Logarithmic series)

மேல்க்கொடுக்கோல் தொடர் : $-1 < x < 1$ என்க

$$\begin{aligned} \log_e (1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ &\quad + \dots \text{ அதாவது } \dots \end{aligned}$$

தெரிப்பு :

$$(1+x)^y = e^{y \log(1+x)}$$

$$\begin{aligned} \text{இடக்கைப் புறம் } (1+x)^y &= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{1.2} x^2 + \\ &\quad \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} x^3 \\ &+ \dots = \text{கத்தழி வரை} \dots \dots (1) \\ &\quad (\text{சுருதுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம்}) \end{aligned}$$

$|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இத்தொடர் ஓர் அறவுக் குறியும் வலுத் தொடராகும்.

$$\begin{aligned} \text{வலக்கைப் புறம் } e^{y \log(1+x)} &= \\ 1 + \frac{y \log(1+x)}{1} + \frac{y^2 [\log(1+x)]^2}{2} \\ &+ \dots = \text{கத்தழிவரை} \dots \dots (2) \\ &\quad (\text{படிக்குறித் தேற்றத்தின் மூலம்}) \end{aligned}$$

இத்தொடரும் $|x| < 1$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் ஓர் அறக்குறியும் வலுத் தொடராகும்.

எனவே வலுத் தொடரின் தேற்றத்தின்படி இரு தொடர்களின் சமபடிக்கெழுக்கள் சமமாகும்.

$$\begin{aligned} \therefore 1 + yx + \frac{y(y-1)}{1.2} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} x^3 + \dots &= \\ = 1 + \frac{y \log(1+x)}{1} + \frac{y^2 [\log(1+x)]^2}{2} + \dots &= \end{aligned}$$

இதில் y -ன் கெழுவைச் சமன்செய்தால்,

$$x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{1.2.x^3}{1.2.3} - \frac{1.2.3.x^4}{1.2.3.4} + \dots = \log(1+x).$$

$$\therefore \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \dots = \infty.$$

உதாரணம் 1 :

(1), (2) இயற்கணித வலுத்தொடரங்களின் y^2 -ல் பெருக்க ஒப்பீட்டால் $[\log(1+x)]^2$ -ன் மதிப்பு கிடைக்கும்.

எனவே,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{[2]} [\log(1+x)]^2 &= \frac{y(y-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \\
 &+ \frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots \infty \text{ - மிகுந்த } y^2\text{-ல் பெருக்க} \\
 &= y \left[\frac{(y-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 + \dots \infty \right] \text{ - மிகுந்த } y^2\text{-ல் பெருக்க} \\
 &= \frac{(y-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(y-1)(y-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \\
 &\quad + \frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots \infty \text{ - மிகுந்த } y\text{-ல் பெருக்க} \\
 &= \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{(1+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{(1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \\
 &\quad - \dots \dots \infty \\
 &= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right) x^3 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^4 - \dots \dots \infty \\
 \therefore [\log(1+x)]^2 &= 2 \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \right) x^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^4 - \dots \dots \infty \right]
 \end{aligned}$$

வினா 2 :

$-1 < x < 1$ ஆகவும்

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \dots \quad (1)$$

இங்கு $x = -x$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad (2)$$

\therefore (1) இலிருந்து (2) இலிருந்து கூட்டினால்,

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 2 \cdot \frac{1}{5} x^5 + \dots$$

$$\therefore \log \left[\frac{(1+x)}{(1-x)} \right] = 2 \left[x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \dots \right] \quad (3)$$

வினா 3 :

(3)-ல் $x = \frac{1}{2n+1}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 2 \left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \infty \right]$$

$$\therefore \log \left(\frac{n+1}{n} \right) = 2 \left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \infty \right]$$

$|x| = \left| \frac{1}{2n+1} \right| < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு இத் தொடர் உண்மையாகும்.

... .. (4)

அதாவது $n > 0$ அல்லது $n < -1$ என்ற மதிப்புகளுக்கும்.

மீளத் தேற்றம் 4 :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n} \text{ என்குதி } x = \frac{m-n}{m+n} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே (3) -ல் சுரு செய்வ

$$\begin{aligned} \log \frac{m}{n} = 2 \left[\left(\frac{m-n}{m+n} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^5 + \dots \right] \quad (5) \end{aligned}$$

இத் தொடர் $\left| \frac{m-n}{m+n} \right| < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு உண்மையாகும்.

$$\text{அதாவது } \left(\frac{m-n}{m+n} \right)^2 - 1 < 0.$$

$$\left[\frac{m-n}{m+n} - 1 \right] \left[\frac{m-n}{m+n} + 1 \right] < 0.$$

$$\left[\frac{-2n}{m+n} \right] \left[\frac{-2m}{m+n} \right] < 0.$$

$$- \frac{4mn}{(m+n)^2} < 0.$$

$$-4mn < 0. \quad \therefore 4mn > 0.$$

$$\therefore mn > 0.$$

எனவே m, n என்ற இரண்டும் ஒரே குறியை அதாவது கூட்டல் அல்லது கழித்தல் குறியைப் பெற்றிருக்கவேண்டும்.

$$(5) \text{ -ல் } \frac{m}{n} = x \text{ என்று சுரு செய்வ,}$$

$$\log x = 2 \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right] \dots (6)$$

x -ன் எல்லாக் கூட்டெண் மதிப்பிற்கும் உண்மையாகும்.

$x = \frac{1}{2y-1}$ என்றால், $\frac{1+x}{1-x} = \frac{y}{y-1}$ என (6)-ல் x ஓடு செய்வதால்,

$$\log \frac{y}{y-1} = 2 \left\{ \frac{1}{2y-1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2y-1)^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2y-1)^5} + \dots \right\} \dots (7)$$

$|x| < 1$ அதாவது $\left| \frac{1}{2y-1} \right| < 1$ என்ற மதிப்பிற்கு இத்தொடரி் பொருத்தும்.

$$\text{அதாவது } (2y-1)^2 > 0.$$

$$y(y-1) > 0.$$

(7) என்ற விதியானது $y < 0$ அதாவது $y > 1$ என்ற மதிப்புக்களுக்கு உண்மையாகும்.

$\log_e 2$ -ன் தோராய மதிப்பித்தல்:

(6)-ல் $m = 2$ $n = 1$ எனக் கொண்டால்

$$\log_e 2 = \log_e 1 + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \dots \right)$$

$$\log_e 1 = 0. \qquad \frac{1}{2} = .500000$$

$$\frac{1}{8} = .037037 \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = .012500$$

$$\frac{1}{8^2} = .004116 \qquad \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8^2} = .000822$$

$$\frac{1}{8^2} = .000487 \quad \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8^2} = .000085$$

$$\frac{1}{8^3} = .000050 \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8^3} = .000005$$

எனவே முதல் 5 உறுப்புகளில் கூட்டுத்தொகை

$$= 2 \times .848660$$

$$= .69812$$

$$= .6981 \text{ தேர்வாயமாக.}$$

சுருத்திக்காட்டு 1 :

$\log_8 8$ -ன் தேர்வாய மதிப்பைக் காண்க.

$$m = \frac{8}{2}, n = \frac{1}{2} \text{ என்று (5)-ல் சுரு செய்ய}$$

$$\log \frac{\left(\frac{8}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right]$$

$$\therefore \log 8 = 2 [.5$$

$$+ .04187$$

$$+ .00625$$

$$+ .001116$$

$$+ .000217$$

$$+ .00004] \text{ முதல் 5 உறுப்புகளில்}$$

கூட்டுத் தொகை

$$= 2 \times .849298$$

$$= 1.698596$$

$$= 1.6986 \text{ தேர்வாயமாக.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$0 < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log (n+1) < 1 \text{ என்று காட்டு.}$$

$0 < x < 1$ என்றால்,

$$\frac{x}{1+x} < \log (1+x) < x \text{ என்பது நமக்குத் தெரியும்.} \dots (1)$$

$x = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$ என்ற மதிப்புகளைத் தொடர்ச்சியாகக் கொடுத்தால்,

$$\log (1+1) < 1$$

$$\log \left(1 + \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}.$$

$$\therefore \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \dots + \log \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\log \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{n}{n-1}, \frac{n+1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\log (n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log (n+1) > 0.$$

$$\frac{1}{x} - \log \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} - \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \dots \dots \dots (2)$$

(2)-ல் $x = 1, 2, \dots, n$ என்று மதிப்புகளைக் கொடுத்துக் கூட்டினால்,

$$1 - \log \frac{2}{1} < 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \log \frac{3}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \sum \frac{1}{n} - \log \frac{2}{1} - \frac{3}{2} - \dots - \frac{n+1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log (n+1) < 1$$

$$\therefore 0 < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log (n+1) < 1$$

குறிப்பு :

முதல் பாகத்தில், இம்முன்று தொடரുകളிலும் பற்றே எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$$a = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \infty \text{ என்றால்}$$

$$x = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots \infty \text{ என்று திறவுக.}$$

$$a = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \log (1+x) \quad |x| < 1$$

$$\therefore e^a = e^{\log (1+x)} = 1+x.$$

$$\therefore x = e^a - 1 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \dots \infty$$

சூத்திரம் 4 :

$$\log \left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}x} \right] \text{ இ } (x-1)\text{-ன் ஒரு வரிசையில் எழுதி}$$

அந்த வரிசையின் மூலம் உறுப்பு $\frac{1}{8} (x-1)^2$ எனக் காட்டுக.

$$h = x - 1 \text{ என்று கொண்டால்,}$$

$$x = 1 + h.$$

$$\therefore \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}x} = \frac{(2+2h+1)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}(1+h)} = \frac{8^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{2h}{8}\right)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}(1+h)}$$

$$\therefore \log \left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{2}}x} \right] = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2h}{8}\right) - \log (1+h)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{2h}{8} - \frac{4h^2}{16} + \dots \right) - \left(h - \frac{h^2}{2} + \dots \right)$$

$$= h(1-1) + h^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) + \dots$$

$$= \frac{h^2}{8} + \dots$$

$$\therefore \text{ மூலம் உறுப்பு } = \frac{h^2}{8} = \frac{(x-1)^2}{8}.$$

சூத்திரம் 5 :

$$\log_e \left[\frac{1}{1-x-x^2+x^3} \right] \text{-ன் வரிசையில் } x^n \text{-ன் கெழு}$$

$$= \frac{1}{2}, n \text{ ஒற்றைப்படை பெண்ணானால்}$$

$$= \frac{3}{8}, n \text{ இரட்டைப்படை பெண்ணானால்}$$

என்பதை நிரூபிப்பது செவிக.

$$1 - x - x^2 + x^3 = (1-x)(1-x^2)$$

$$\therefore \log \frac{1}{1-x-x^2+x^3} = \log(1-x) + \log(1-x^2) \\ = \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \right] + \left[x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} + \dots \right]$$

(i) $n =$ ஒத்தைப்படை எண் ($= 2r+1$) என்று கொள்ளுங்கள்,

$\therefore x^4 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} + \dots$ என்ற விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு = 0

$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$ என்ற விரிவத்தில் x^n -ன் கெழு = $\frac{1}{n}$.

(ii) $n =$ இரட்டைப்படை எண் $= 2r$ என்று கொள்ளுங்கள்,

$\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \right]$ -ன் விரிவில் x^{2r} -ன் கெழு = $\frac{1}{2r}$.

$\left[x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \dots \right]$ -ன் விரிவில் x^{2r} -ன் கெழு = $\frac{1}{r}$.

$$\therefore x^{2r}\text{-ன் கெழு} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{2r} = \frac{2}{n}.$$

$\therefore \log \frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ -ன் விரிவில் x^n -ன் கெழு $\frac{1}{n}$ ஆகிறது $\frac{2}{n}$ ஆகும்.

4. எண் கொள்கை

(Theory of Numbers)

4-1. இப்பகுதி முழுவதும் 'எண்' என்ற குறிப்பிடுவது ஒரு கூட்டு முழு எண்ணை (Positive integer) மட்டுமேயாகும். அத்துடன் மீதியின்றி வகுக்கப்படும் எண்ணைக் குறிக்கும்போது 'வகுபடும்' என்ற குறிப்பிடப்படும்.

a என்ற எண்ணை b என்ற எண்ணால் வகுத்தால் q சவகவும், r மீதியாகவும் வகுமேயாகில் $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) ஆகும். $r=0$ என்றால் a என்னும் எண் b -யினால் மீதியின்றி வகுக்கப்படுகிறது. எனவே $a=bq$ ஆகும். இவையே நாம் $a=M(b)$ என்று குறிப்பிடுவோம். a ஆனது b -ன் மடங்கு (Multiple of b) என்பதையே நாம் $M(b)$ என்று எழுதுகிறோம்.

ஒர் எண் அந்த எண்ணாலும், ஒன்றாலும் மட்டுமே வகுப்படுமே யானால் அதை நாம் பகா எண் (Prime number) என்று அழைக்கிறோம். உதாரணமாக 2, 3, 5, 7, 11, 13 - இவைகள் பகா எண்கள் ஆகும்.

4-2. ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் (Numbers Prime to each other)

இரண்டு எண்களுக்கு ஒன்றைத் (1) தவிர வேறு எந்த பொதுக் காரணியும் இல்லையாகில் அந்த இரண்டு எண்களையும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் என்கிறோம். உதாரணமாக 11, 13 ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். 24, 35 ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

4-3. தொகுப்பெண் (Composite number)

ஒர் எண் அந்த எண்ணாலும் ஒன்றாலும் மட்டுமேயன்றி வேறு எண்களையும்கூட எண்களாலும் வகுப்படுமேயாகில் அத்தகைய எண்ணைத் தொகுப்பெண் என்கிறோம்.

உதாரணம் : 6, 9, 10.

தொகுப்பெண்ணை இரண்டு காரணிகளாகப் பிரித்தால் ஒன்று அத்தொகுப்பெண்ணின் மூலத்தை விடப் பெரியதாக இருக்கும்; மற்றொன்று மூலத்தை விடச் சிறியதாக இருக்கும். அப்படி இல்லா விடில் இரண்டுமே சமமாக இருக்கும்.

உதாரணமாக : $36 = 12 \times 3$

$$\therefore 12 > 6$$

$$3 < 6$$

$$36 = 6 \times 6$$

4.4. எரத்தெஸ்தெனிகஸின் ஷைவ் (The Sieve of Eratosthenes)

எரத்தெஸ்தெனிக் என்ற கணித மேதை ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணுக்குக் குறைந்த எல்லாப் பகா எண்களையும் காணும் முறையை வகுத்தவருள்ளார். அம் முறை பின்வருமாறு :

50-க்குக் குறைந்த பகா எண்களை ஆறிய, முதலில் 1 முதல் 50 வரை எண்களை எழுதிக் கொள்ளவேண்டும்.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

முதலில் 2-ன் மடங்குகளாகிய 4, 6, 8, என்ற எண்களை, மேலே எழுதியுள்ள 1 முதல் 50 வரையுள்ள எண்களில் நீக்க வேண்டும்.

மீன்மாச் அடுத்து நீக்கப்படாத எண்ணுதிய 8-ன் மடங்குகளாகிய 6, 9, 12...என்ற எண்களை நீக்கவேண்டும். இவைகளுள் சில, 2-ன் மடங்குகளை நீக்கும்போது நீக்கப்பட்டிருக்கும்.

மீன்மாச் 5-ன் மடங்குகளாகிய 10, 15, 20...என்ற எண்களை நீக்கவேண்டும். இவைகளுள் சில 2-ன் மடங்குகளையும், 3-ன் மடங்குகளையும் நீக்கும் போதே நீக்கப்பட்டிருக்கும்.

இங்ஙனமே 7-ன் மடங்குகளாகிய 14, 21, 28, 35, 42, 49ஐ நீக்கவேண்டும். 14, 21, 28, 35, 42 என்ற எண்கள் ஏற்கெனவே 2-ன் மடங்கு, 3-ன் மடங்கு, 5-ன் மடங்குகளை நீக்கும் போதே நீக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே, 49 மட்டும் 7-ன் மடங்கில் நீக்காது உள்ள எண். அதையும் நீக்கவேண்டும்.

இங்ஙனமு நீக்கப்படாத எண்களின் மடங்குகளை நீக்கிக் கொண்டு போனால் 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்களின் தொகுப்புக் கிடைக்கும்.

கட்டங்களில் உள்ள எண்களை 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்கள் ஆகும். அதாவது,

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 என்பனவகளை 1 முதல் 50 வரை உள்ள பகா எண்கள்.

4-5. தேற்றம் I:

a ஐ b ஆக வகுக்கும் போது q மூலாகவும், r மீதியாகவும் வகுமையில், a -க்கும் b -க்கும் உள்ள பொதுக் காரணிகளே b -க்கும் r -க்கும் பொதுவாக உள்ள காரணிகளாகும்.

தெரிப்பு :

$a = bq + r$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே a , b என்ற இரண்டையும் மீதியின்றி வகுக்கும் எந்த எண்ணும் ' r ' ஐயும் மீதியின்றி வகுக்கும்.

விளக்கக் குறிப்பு :

$138 = 24 \times 5 + 18$. இங்கு $a = 138$, $b = 24$, $q = 5$, $r = 18$. 138, 24-இவற்றின் பொதுக்காரணிகள் 2, 3 ஆகும். இவை 24, 18-க்கும் பொதுக் காரணிகளாகும்.

4.6. தேற்றம் 2 :

ஒர் எண் (x) எவையேனும் இரண்டு எண்களின் பெருக்குத் தொகையை ($a \times b$) மீதியின்றி வகுக்குமானால் அத்த எண் (x) இரண்டு எண்களில் ஒன்றுக்கு, ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாகும் (Prime to each other). அத்த எண் இரண்டாவது எண்ணை மீதியின்றி வகுக்கும்.

$a \times b$ ஐ, x மீதியின்றி வகுத்தால், x -ம் b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், a ஐ x மீதியின்றி வகுக்கும்.

தெரியு :

$a \times b = M(x) = Qx$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது a ஐ x மீதியின்றி வகுக்குமானால் Q ஆனது x -ன் மடங்காகும். அதையே நாம் $M(x) = Qx$ என்று எடுத்துள்ளோம். x -ம் b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். இரண்டு பக்கங்களிலும் x ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{a \times b}{x} = \frac{Qx}{x}$$

$$\frac{a \times b}{x} = Q = \text{ஒரு முழு எண்}$$

இடப் புறத்தில் b ஐ x ஆல் மீதியின்றி வகுக்க முடியாது. ஏனெனில் x -ம் b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். அதாவது b -க்கும் x -க்கும் பொதுக் காரணி 1 மட்டும்தான்.

இடப்பூற்றும் ஒரு முழு எண் வரவேண்டுமானால், $\left(\frac{a}{x}\right)$ ஒரு முழு எண்ணாக இருக்க வேண்டும். அப்படி இருக்குமா?.

$\left(\frac{a}{x}\right) \times b = \text{முழு எண்} \times b = Q$ என்ற முழு எண். ஆகையால், $\left(\frac{a}{x}\right)$ ஒரு முழு எண்ணாகையால் a ஐ x மீதியின்றி வகுக்கும்.

எனவே $a \times b$ ஐ, x மீதியின்றி வகுத்தால், x -ம் b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், x இரண்டாவது எண் ' a ' ஐ மீதியின்றி வகுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$6 \times 7 = 42 = 14 \times 3$$

$$6 \times 7 = M(3)$$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் $a = 6$, $b = 7$, $Q = 14$, $x = 3$ என்ற கொள்வோமானால், 7-ம் 3-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். மேலும் 3 மீதியின்றி வரும். $6 = M(3) = 2 \times 3$.

4.7. விளக்கத்தேர்வுகள் :

(i) ஒரு பகா எண் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்களில் பெருக்குத் தொகையை மீதியின்றி வகுத்தால், அவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு எண்ணையாகிலும் மீதியின்றி வரும்.

(ii) ஒரு பகா எண் n^{th} வகுக்குமாயின் அத்த எண் a ஐ மீதியின்றி வரும்.

(iii) $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றும் a என்ற எண்ணுக்கு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால் a -ம், $(\alpha \times \beta \times \gamma \dots)$ என்ற பெருக்கி வரும் எண்ணும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.

(iv) a -ம், b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகின் a^p -ம் b^q -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.

4.8. தேற்றம் 3 :

ஒவ்வொரு தொகுப்பு எண்ணுக்கும் குறைந்தது ஒரு பகா எண் காரணி உண்டு.

தெரிப்பு :

p என்ற ஒரு தொகுப்பு எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். p -க்கு 1, p என்பவற்றைத் தவிர வேறு காரணிகளும் உண்டு. அவைகள் p ஐ விடச் சிறியவைகளாக இருக்கவேண்டும். அவற்றுள் மிகச் சிறிய காரணி ' p ' என்று எடுத்துக் கொள்வோம். ' p ' ஒரு பகா எண் என்று நிரூபிக்கவேண்டும்.

[பகா எண்ணாக இல்லாவிடும், ' p '-க்குக் காரணிகள் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றும் p -க்கும் காரணிகளே. அவை 1 ஐ விடச் சிறியவைகளாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் 1 தான் p -ன் மிகச் சிறிய காரணி என்று எடுத்துள்ளோம். எனவே தான் எடுத்துக் கொண்டதற்கு முன்புபாடாக இருப்பதால், 1 ஐ விடச் சிறியதாகக் காரணிகள்

இதுக்க முடியாது. ஆகையால் / ஒரு பகா எண்ணாகும். அதுவே p -ன் மிகச் சிறிய காரணி, ஆகவே ஒரு தொகுப்பு எண்ணுக்குக் குறைத்தது ஒரு பகா எண் காரணி உண்டு.

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதா அல்லது முடிவில்லாததா என்ற கேள்வி கணித மேதைகளுக்கு எழுந்தது. ஆய்வுகள் என்ற கணித மேதை பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது என நிரூபித்துள்ளார்.

4-8. தேற்றம் 4 :

பகாவெண்களின் எண்ணிக்கை முடிவில்லாதது.

தெரியு :

பகாவெண்களின் எண்ணிக்கை மொத்தம் ' N ' என்று எடுத்துக் கொள்வோம். N ஒரு திட்டமான எண்ணாகும். அவைகள் $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், எண்ணினத்தில் $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ என்ற பகா எண்களைத் தவிர மற்றவை தொகுப்பெண் களாக இருக்கும்.

$a = p_1 p_2 p_3 \dots p_N + 1$ என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால், a ஐ p_1 ஆல் வகுத்தால் $p_1 p_2 \dots p_N$ சவாகவும், 1 மீதியாகவும் வரும். எனவே a -ல், p_1 -ல் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண் களாகும். இதே போல் a ஐ p_2, p_3, \dots, p_N என்ற எந்த பகா எண்ணால் வகுத்தாலும் 1 மீதி வரும். எனவே a -ல் ஒரு பகா எண் ஆகும்; அல்லது a -க்கு p_1, p_2, \dots, p_N ஐத் தவிர்த்து ஒரு பகா எண் காரணி இருக்கவேண்டும். ஆனால், இது நாம் $p_1 p_2 p_3 \dots p_N$ என்ற எண்கள் மட்டுமே எண்ணினத்தில் உள்ள பகா எண்கள் என்று எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண்பாடாக உள்ளது. எனவே பகா எண்களின் எண்ணிக்கை கணக்கிடப்படாதது.

மேற்கூறிய தேற்றத்தின் மூலம் நாம் கணக்கில்லாத பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்கும் முறைகளைக் காணலாம். 2-ல், 3-ல் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே

$$2 \times 3 + 1 = 7 - \text{பகாவெண்}$$

$$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31 \quad ..$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211 \quad ..$$

$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$

$$... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...$$

ஆனால் இம்முறைமீனைக் கவலாண்டு நாம் எல்லாப் பகா எண்களையும் கண்டுபிடிக்க இயலாது. எனவே கணித மேதைகள் சிலர் பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்க சில இயற்கணித வாய்பாடுகளை சில கட்டுப்பாடுகளில் அமைத்துள்ளார்கள். ஆனாலும் அவ்வாய்பாடுகள் எல்லாப் பகா எண்களையும் கண்டுபிடிக்கப் பயன்படா.

n -ன் சில குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு, சில இயற்கணித வாய்பாடுகளைக் கொண்டு பகா எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாம். அவைகளுள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$n < 40$ ஆனால் $n^2 + n + 41$ என்பது ஒரு பகா எண்ணாகும்.

$n < 18$ ஆனால் $n^2 + n + 17$ ஒரு பகா எண்.

$n < 29$ ஆனால் $2n^2 + 29$ ஒரு பகா எண்.

$n < 80$ ஆனால் $n^2 - 79n + 1601$ ஒரு பகா எண்.

$n < 5$ ஆனால் $2^{2n} + 1$ ஒரு பகா எண்.

4-10. தேற்றம் 5 :

ஒரு தொகுப்பெண்ணைப் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பான மூலையில் எழுதலாம்.

தெரியு :

ஒரு தொகுப்பெண்ணுக்குக் குறைத்தது ஒரு பகா எண் காரணிவாக இருக்கும் என்பதைப் (தேற்றம் 3-ல்) பார்த்தோம். N என்பதை ஒரு தொகுப்பெண்ணை எடுத்துக்கொண்டால் இதற்குக் குறைத்தது ஒரு பகா எண் காரணி உண்டு. அதை ' a ' என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$N = ax \text{ ஆகும்.}$$

x -ன் ஒரு பகா எண்ணாக இருக்கலாம். அப்படி x ஒரு பகா எண்ணாக இல்லாவிடில், ஒரு தொகுப்பெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

x ஒரு தொகுப்பெண்ணாக இருக்குமானால், x -க்குக் குறைத்தது ஒரு பகா எண்ணாவது காரணியாக இருக்கவேண்டும். b ஆனது x -ன் பகா எண் காரணியாக இருக்குமாகில்

$$x = by \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore N = a \cdot a_1 = a(by) = ab(y) = \dots \dots \dots$ இவ்விதமாக நாம் தொடர்ந்து எழுதிக்கொண்டே போனால் கடைசியில் ஒரு பகா எண் காரணியில் வந்து முடியும்.

$\therefore N = a b c d \dots \dots k$ எனப் பகா எண்களின் பெருக்கத் தொகையாக இருக்கும்.

இந்த ஒரே ஒரு முறையில்தான் N ஐ எழுதலாம்; வேறு எந்த முறையிலும் எழுத முடியாது என்று நினைக்கலாம். N ஐ வேறு முறை யிலும் பகாயெண்களின் பெருக்கத்தொகையாக எழுத முடியும் என்று எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது,

$N = \alpha \beta \gamma \dots \phi$ என்று எடுத்துக்கொண்டால் $N = a b c d \dots k = \alpha \beta \gamma \dots \phi$.

N ஐ α ஆக வகுத்தால், $\frac{N}{\alpha} = \beta \gamma \dots \phi =$ ஒரு முழு எண் வரும்.

$$\therefore \frac{N}{\alpha} = \text{ஒரு முழு எண்.}$$

$$\therefore \frac{a b c d \dots k}{\alpha} \text{ ஒரு முழு எண்.}$$

ஆனால் a, b, c, \dots எல்லாம் பகா எண்கள். α -ம் ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதால், α என்னும் பகா எண், a, b, c, \dots, k எப்பவற்றுள் ஏதேனும் ஒர் எண்ணுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். அப்படி இருத்தால்தான் நமக்கு முழு எண் கிடைக்கும். $\alpha = a$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{a b c d \dots k}{\alpha} = b c d \dots k = \text{ஒரு முழு எண்.}$$

இவ்வாறு தொடர்ந்து கொண்டே போனால், $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \phi$ என்ற எண்களும் a, b, c, \dots, k என்ற எண்களும் ஒன்றே ஆகும்.

எனவே $N = \alpha \beta \gamma \dots \phi$ என்பதை,

$$N = nbc \dots k \text{ என்ற எழுதலாம்.}$$

ஆகையால் $N = nbc \dots k$ என்ற ஒரே ஒரு சிறப்பான முறையில் பல எண்களின் பெருக்கத் தொகையாக N என்ற தொகுப்பெண்ணை எழுதலாம்.

குறிப்பு :

$N = a^s b^r c^t \dots$ என்ற மூலதனமிலும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$\begin{aligned} 480 &= 16 \times 30 \\ &= 16 \times 2 \times 15 \\ &= 32 \times 3 \times 5 \\ &= 2^5 \times 3^1 \times 5^1 \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

N ஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை :

4.11. தேற்றம் 8 :

p, q, r, \dots என்பன பகா எண்கள். a, b, c என்பன தேர்ந்தெடுத்த எண்கள். $N = p^s q^b r^t \dots n^k$ எனில், N ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை $(s+1)(b+1)(t+1) \dots (k+1)$ ஆகும்.

தெரிப்பு :

$N = p^s q^b r^t \dots n^k$ என்ற எண்ணின் மீதியின்றி வகுக்கும் எண் $p^{s_1} q^{b_1} r^{t_1} \dots n^{k_1}$ என்று இருக்குமானால்,

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_1 \leq s \\ 0 &\leq b_1 \leq b \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \text{ஆகும்.} \end{aligned}$$

$p^{s_1} q^{b_1} r^{t_1} \dots n^{k_1}$ போன்ற எண்கள்,

$[1 + p + p^2 + \dots + p^s] [1 + q + q^2 + \dots + q^b]$
 $[1 + r + r^2 + \dots + r^t] \dots \dots$ என்ற பெருக்குத்தொகையில்
 வரும். இத்தொகையில் 1, $N = (p^s q^b r^t \dots n^k)$ ஐயும் சேர்த்து
 கற்பட்டுள்ளது. இப் பெருக்குத் தொகையில் $(s+1)(b+1) \dots \dots$
 $(k+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

ஆகையால் N ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை $(s+1)(b+1)(t+1) \dots (k+1)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

480ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள், 1; 480ஐத் தவிர எந்தவின ஆகும்?

$$480 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

இங்கு $a = 5$, $b = 1$, $c = 1$. எனவே 480 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை,

$$= (5+1)(1+1)(1+1)$$

$$= 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ ஆகும்.}$$

[இத்த 24 எண்களும், $(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)$
 $(1+3)(1+5)$ -ல் தோன்றும் உறுப்புகள் ஆகும்.]

எனவே 480 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் 1; 480 ஐத் தவிர 22 எண்கள் ஆகும். ஏனெனில் 24 வகுக்கும் எண்களில் 1-ம், 480-ம் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

4.12. தேற்றம் 7 :

$N = p^a q^b r^c \dots m^k$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$\left(\frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \right) \left(\frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \right) \left(\frac{r^{c+1} - 1}{r - 1} \right) \dots \left(\frac{m^{k+1} - 1}{m - 1} \right)$$

ஆகும்.

தெர்ப்பு :

நாம் தேற்றம் 6-ல் $N = p^a q^b r^c \dots m^k$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் $(1+p+p^2+\dots+p^a)(1+q+q^2+\dots+q^b)\dots(1+m+m^2+\dots+m^k)$ என்ற பெருக்குத் தொகையில் வரும் உறுப்புகள் எனப் பரிசீலிப்போம்.

எனவே அவைகளின் கூட்டுத் தொகை

$$\left(\frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \right) \left(\frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} \right) \left(\frac{r^{c+1} - 1}{r - 1} \right) \dots \left(\frac{m^{k+1} - 1}{m - 1} \right)$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

15485 ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்கள் எத்தனை? அவற்றின் கூட்டுத் தொகை என்ன?

$$15485 = 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2.$$

∴ 15486 ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை,

$$= (2+1)(1+1)(3+1) = 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ = 24$$

அவற்றின் கூட்டுத் தொகை

$$= (1+2+2^2)(1+5)(1+7+7^2+7^3)$$

என்ற பெருக்குத் தொகையில் நேர்மறும் உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை

$$= \left(\frac{8^4-1}{8-1} \right) \left(\frac{5^4-1}{5-1} \right) \left(\frac{7^4-1}{7-1} \right) \\ = \left(\frac{96}{2} \right) \left(\frac{24}{4} \right) \left(\frac{2400}{6} \right) \\ = 18.6.400 \\ = 81800.$$

4.13. முழு எண் பகுப்பு : (Integral part of a real number)

x -ன் முழு எண் பகுப்பை $I(x)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக $I\left(11\frac{2}{3}\right) = 11$, $I\left(\frac{4}{9}\right) = 0$, $I(\sqrt{2}) = 1$.

4.14. தேற்றம் 8 :

p ஒரு பகர் என்ற ஆகில் $\lfloor n \rfloor$ -ன் p -ன் மிகப் பெரிய படி

$$I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots$$

தொப்பு :

$n < p$ ஆனால் $\lfloor n \rfloor$ -ன் p -ஆம் மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் இருக்க முடியாது.

$n > p$ ஆனால், $\lfloor n \rfloor$ -ன் p -ஆம் மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள் இருக்க முடியும்.

$\underline{n} = 1, 2, 3, \dots, n$ என்ற பெருக்குத் தொகையின் p ஐக் காரணியாகக் கொண்ட, உறுப்புகள்,

$$p, 2p, 3p \dots I\left(\frac{n}{p}\right)p \dots \dots \dots (1)$$

$\therefore I_1 = I\left(\frac{n}{p}\right)$ உறுப்புகள் \underline{n} -ல் p ஆக வகுபடும்.

p^2 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள்

$$p^2, 2p^2, 3p^2 \dots I\left(\frac{n}{p^2}\right)p^2, \dots \dots (2)$$

$I_2 = I\left(\frac{n}{p^2}\right)$ உறுப்புகள் \underline{n} -ல் p^2 ஆக வகுபடும்.

அதேபோல் p^3 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள்

$$p^3, 2p^3, 3p^3 \dots \dots I\left(\frac{n}{p^3}\right)p^3, \text{ ஆகும். } \dots (3)$$

$I_3 = I\left(\frac{n}{p^3}\right)$ உறுப்புகள் \underline{n} -ல் p^3 ஆக மீதியின்றி வகுபடும்.

அவ்வாறே $p^4, p^5 \dots$ என்பவற்றைக் காரணிகளாகக் கொண்ட உறுப்புகளை எழுத வேண்டும்.

ஒரு திசையில் $I\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0$ ஆகும். (2) வரிசையில் p^3 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட உறுப்புகள் ஒரு நூற்ற (1) வரிசையில் வரும். அதேபோல் p^2 ஐக் காரணியாகக் கொண்ட (2) வரிசை உறுப்புகள் ஒரு நூற்ற (1)-ஐம் (2)-ஐம் தேர்ந்து, அவ்வாறே மீத உறுப்புகளும். எனவே, \underline{n} -ல் p தேர்ந்து மீதப் பெரிய படி,

$$\begin{aligned} & I_1 + I_2 + I_3 + \dots \dots + I_{k-1} \\ &= I\left(\frac{n}{p}\right) + I\left(\frac{n}{p^2}\right) + I\left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots + I\left(\frac{n}{p^{k-1}}\right) \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

| 900-ல் 7-ன் மிகப் பெரிய படி என்ன ?

$I_1 = I\left(\frac{900}{7}\right) = 128$ உறுப்புகள் | 900-ல் 7-ஐக் காரணி யாகக் கொண்டுள்ளன. அவைகள் 7, 14, 21 $I\left(\frac{900}{7}\right) \times 7$ ஆகும்.

அதேபோல் 7^2 ஆக வகுபடும் எண்கள்,

$$7^2, 2 \cdot 7^2, 3 \cdot 7^2 \dots \dots I\left(\frac{900}{7^2}\right) \times 7^2.$$

அதாவது, $49, 98, \dots \dots I\left(\frac{900}{7^2}\right) \times 7^2$

∴ அவற்றின் எண்ணிக்கை

$$= I_2 = I\left(\frac{900}{7^2}\right) = I\left(\frac{128}{7}\right) = 18 \text{ ஆகும்.}$$

7^3 ஆக வகுபடும் உறுப்புகள்,

$$7^3, 2 \cdot 7^3, 3 \cdot 7^3 \dots \dots I\left(\frac{900}{7^3}\right) 7^3 \text{ ஆகும்.}$$

அவற்றின் எண்ணிக்கை,

$$I_3 = I\left(\frac{900}{7^3}\right) = I\left(\frac{15}{7}\right) = 2.$$

∴ 7-ன் மிகப் பெரிய படி

$$= I_1 + I_2 + I_3 = 128 + 18 + 2 = 148.$$

4.15. தேற்றம் 9 :

அடுத்தடுத்து வரும் n முழு எண்களின் பெருக்கத்தொகை $(x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+n)$ ஆனது $\frac{1}{n}$ ஆக வகுபடும்.

தெரியு!

அடுத்தடுத்து n முழு எண்களின் பெருக்கத்தொகை

$$= (1+1)(x+2)(x+3) \dots (x+n).$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1.2.3 \dots x)}{[x]} \cdot [(x+1)(x+2) \dots (x+n)] \\
 &= \frac{[x+n]}{[x]} \\
 \therefore \frac{(x+1)(x+2) \dots (x+n)}{[n]} &= \frac{[x+n]}{[x] \times [n]} \\
 &= {}^{x+n}C_n = {}^{x+n}C_x \\
 &= \text{ஒரு கூட்டு மூலம் என்க.}
 \end{aligned}$$

எனவே அடுத்தடுத்த n மூலம் எண்களின் பெருக்குத் தொகையை $[n]$ ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

4.16. தேற்றம் 10:

n ஒரு பகா எண்ணாக இருக்குமானால் nC_r ஐ n ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

தெரியு:

$$\begin{aligned}
 nC_r &= \frac{[n]}{[r] [n-r]} = \frac{1.2.3 \dots (n-r) (n-r+1) \dots (n-1)r}{(1.2.3 \dots r) [1.2.3 \dots (n-r)]} \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{1.2.3 \dots r}
 \end{aligned}$$

தேற்றம் 9-ன் மூலம், $(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ என்ற அடுத்தடுத்த r மூலம் எண்களின் பெருக்குத்தொகையை $[r]$ ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். இப்பொழுது n ஒரு பகா பெண், எனவே n ஐ விடச் சிறியவைகளாக உள்ள எண்கள் n உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். $n > r$ ஆகையால், $1.2.3 \dots r$ என்ற எல்லா எண்களும் n ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும். எனவே அவைகளின் பெருக்குத் தொகை

$1.2.3 \dots r = [r]$ -ம், n ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாகும்.

எனவே தேற்றம் 2-ன் படி,

$n \left[\frac{(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{[r]} \right]$ -ம், n -ம், $[r]$ -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே $(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$ ஐ $[r]$ மீதியின்றி வகுக்கும்.

$$\therefore n \left[\frac{(n-1)(n-2) - (n-r+1)}{r} \right] = n \text{ (முழு எண்).}$$

$$= M(n).$$

$$\therefore nC_r = M(n).$$

எனவே, nC_r இ n ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

4.17. ஆய்வுச் சார்பு (Euler's Function) $\phi(N)$.

N என்ற எண்ணுக்குக் குறைவாய் N ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாய் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை $\phi(N)$ என்ற சார்பாக குறிக்கப்படுகிறது. ஆய்வுச் சார்பு என்ற கணித மேதைவாய் இந்தச் சார்பு குறிக்கப்பட்டதால் இது ஆய்வுச் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது. $\phi(N)$ கணக்கிடும்போது 1 ஐ எல்லா எண்களுக்கும் பகா எண்ணாக எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

$\phi(1)$ மட்டும் மேற் கூறிய வரைபுமையின்படி இல்லாததால்

$\phi(1) = 1$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\phi(2) = 1$ [2 ஐ விடக் குறைவானதாகவும், 2 க்குப் பகா எண்ணாகவும் உள்ள எண் 1 மட்டும் தான்]

$\phi(3) = 2$ [3 ஐ விடக் குறைவானவைவராகவும், 3 க்குப் பகா எண்களாகவும் உள்ள எண்கள் 1, 2 மட்டும் தான்]

$\phi(4) = 2$ [1, 3 இவை இரண்டு எண்களும் 4 ஐ விடக் குறைவானவை. 4 ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.]

$\phi(5) = 4$ [1, 2, 3, 4-இவை தாக்கு எண்களும் 5 ஐ விடக் குறைவானவை. 5 ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகும்.]

4.18. தேற்றம் 11 :

$\phi(N)$ -ன் மதிப்பு $N = p^a q^b r^c \dots$ எனில் N என்ற எண்ணுக்கு குறைவாய் N உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்ணாய் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை

$$N \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \dots$$

ஆகும்.

அதாவது,

$$\phi(N) = N \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \dots$$

தெரியு :

தாம் மூலப் $N = p^a q^b r^c \dots$ என்ற ஒரு தொகுப்பு எண்ணின் ஒரே ஒரு தனிச் சிறப்பான முறையில் பலா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக எழுதலாம் என்று திருபித்தோம். $\phi(N)$ கணக்கிடுவதற்கு N ஐ விடக் குறைவானவைகளும், N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்டவைகளான எண்கள் எத்தனை எனக் கண்டுபிடிக்கலாம். இந்த எண்ணிக்கையை N -லிருந்து கழித்தால் கிடைப்பது $\phi(N)$; அதாவது N ஐ விடக் குறைவானவைகளாலும் N உடன் ஒன்றுக்கொன்று பலா எண்களாகவும் அமைந்த எண்களின் எண்ணிக்கையாகும். N ஐ விடக் குறைவாயும் N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்டவைகளான எண்கள், N உடன் $p, q, r \dots$ எகப்பவற்றுள் ஒன்று ஆகியது பல எண்களைப் பொதுக் காரணிகளாகக் கொண்டிருக்கும்.

$1, 2, 3, \dots, N$ என்ற எண்களில் p ஆல் வகுபடும் எண்கள் $p, 2p, 3p \dots \left(\frac{N}{p}\right)p$. எனவே $\left(\frac{N}{p}\right)$ எண்கள் p ஆல் வகுபடும்.

அதேபோல $\frac{N}{q}$ எண்கள் q ஆல் வகுபடும். $\left(\frac{N}{r}\right)$ எண்கள் r ஆல் பிதிபீன்ற வகுபடும். இதேபோல s, t, \dots ஆல் பிதிபீன்ற வகுபடும் எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{r}, \frac{N}{s} \dots$ ஆகும்.

இதேபோல pq ஆல் வகுபடக்கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை $\frac{N}{pq}$ ஆகும்.

அகலாதே $qr, rs \dots$ ஆல் வகுபடக் கூடிய எண்களின் எண்ணிக்கை முறையே $\frac{N}{qr}, \frac{N}{rs} \dots$ ஆகும். அகலாதே மற்ற எண்களும் ஆகும்.

$$\text{இப்போது } \sum \frac{N}{p} - \sum \frac{N}{pq} + \sum \frac{N}{pqr} - \dots \dots (1)$$

என்ற தொடரை எடுத்துக் கொள்வோம்.

N -க்குக் குறைந்த ஓர் எண், p என்ற ஒரே ஒரு பகா எண்ணும் மாத்திரம் வகுபடுவனவும், அது ஓர் எண்ணாக $\frac{N}{p}$ -ல் எண்ணப் படுகிறது.

இப்பொழுது N -க்குக் குறைவாய் உள்ள x என்ற எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். அது $p, q, r \dots$ என்ற பகா எண்களில் K எண்களால் வகுபடக் கூடியவராய் இருக்கட்டும். இந்த எண் முதற்கண் (1) என்று குறித்த தொடரில் எத்தனை முறை கணக் கிடப்படுகிறது என்று காண்போம்.

$$\sum \frac{N}{p} \text{-ல் } x, \quad K \text{ முறை கணக்கிடப்படுகிறது.}$$

$$\sum \frac{N}{pq} \text{-ல் } {}^1C_2 \text{ முறை கணக்கிடப்படுகிறது.}$$

$$\sum \frac{N}{pqr} \text{-ல் } {}^1C_3 \text{ முறை கணக்கிடப்படுகிறது.}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

எனவே $x, \sum \frac{N}{p} - \sum \frac{N}{pq} + \sum \frac{N}{pqr} \dots$ என்ற தொடரில் கணக்கிடப்படும் முறைகளின் எண்ணிக்கை,

$$= K - {}^1C_1 + {}^1C_2 - {}^1C_3 + \dots = (-1)^{K-1} {}^1C_K$$

$$= {}^1C_1 - {}^1C_2 + {}^1C_3 - \dots + (-1)^{K-1} {}^1C_K$$

$$= (1 - {}^1C_2) + {}^1C_1 - {}^1C_3 + {}^1C_3 - \dots$$

$$= 1 - [{}^1C_2 - {}^1C_1 + {}^1C_3 - \dots]$$

$$= 1 - [1 - 1] = 1.$$

அதாவது N -க்குக் குறைவாய் N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்ட எந்த ஓர் எண்ணும் மேற் குறித்த தொடரில் ஒரே ஒரு முறைதான் எண்ணப்படுகிறது. எனவே N ஐ விடக் குறைவாகவும், N உடன் பொதுக் காரணிகள் கொண்டதாகவும் உள்ள எண்களின் எண்ணிக்கை மேற்குறித்த தொடரின் கூட்டுத்தொகையாகும். எனவே N ஐ விடக் குறைவாகவும், N உடன் ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்களாகவும் குறைந்த எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= N - \left[\sum \frac{N}{p} - \sum \frac{N}{pq} + \sum \frac{N}{pqr} \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= N - \left[1 - 2 \frac{1}{p} + 2 \frac{1}{pq} - 2 \frac{1}{pqr} \dots \right] \\
 &= N \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{1}{q} \right) \left(1 - \frac{1}{r} \right) \dots
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

1575-க்கு குறைவான பகா எண்கள் எத்தனை?

$$1575 = 5^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$\begin{aligned}
 &= 1575 \left(1 - \frac{1}{5} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{7} \right) \\
 &= 720
 \end{aligned}$$

$$\therefore \phi(1575) = 720.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

210-க்கு குறைவான பகா எண்கள் எத்தனை உள்ளன?

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$\begin{aligned}
 &= 210 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\
 &\quad \left(1 - \frac{1}{5} \right) \left(1 - \frac{1}{7} \right) \\
 &= 210 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \\
 &= 48
 \end{aligned}$$

$$\therefore \phi(N) = 48.$$

4.19. வினாத்தேர்தல் 1 :

$N=ab$ ஆனால் a -ம் b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால்,

$$\phi(N) = \phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

தெரிப்பு :

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$$

$$b = q_1^{b_1} q_2^{b_2} q_3^{b_3} \dots q_r^{b_r}$$

என எடுத்துக் கொள்வோம்.

a , b எந்த இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாக இருப்பதால் $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, \dots, q_r$ ஒன்றுக்கொன்று வேறு பட்டவை.

$$\phi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\phi(b) = b \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)$$

$$N = ab = (p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}) (q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_r^{b_r})$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi(N) &= N \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \\ &= ab \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \\ &= \left[a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \right] \\ &\quad \times \left[b \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \right] \\ &= \phi(a) \cdot \phi(b). \end{aligned}$$

வினா 3. தேற்றம் 2 :

a, b, c, d, \dots, k ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால்

$$\phi(abcd \dots k) = \phi(a) \phi(b) \dots \phi(k).$$

வினாத்தேற்றம் 3 :

$$a \text{ ஒரு பகா எண் எனில் } \phi(a) = a \left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

4.20. தேற்றம் 12 :

$d_1 = 1, d_2, d_3, \dots, d_r = n$. இவைகள் n ஐ மீதியின்றி வகுக்குமானால், $\phi(d_1) + \phi(d_2) + \dots + \phi(d_r) = n$ ஆகும்.

தெரிவு :

$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_r^{a_r}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ என்பன பகா பெண்கள்; $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ முழு எண்களாகும்.

n ஐ மீதியின்றி வகுக்கக் கூடிய எண்ணை $p_1^x p_2^y p_3^z \dots$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், x, y, z, \dots முறையே $0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq a_2, \dots$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் இருக்கும்.

மேற் கூறிய வினாத்தேற்றத்திலிருந்து,

$$\phi(p_1^x \cdot p_2^y \cdot p_3^z \dots) = \phi(p_1^x) \phi(p_2^y) \phi(p_3^z) \dots \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\phi(d_1), \phi(d_2), \phi(d_3) \dots$ என்ற உறுப்புகள்,

$$\begin{aligned} & \{1 + \phi(p_1) + \phi(p_1^2) + \dots + \phi(p_1^{a_1})\} \\ & \times \{1 + \phi(p_2) + \phi(p_2^2) + \dots + \phi(p_2^{a_2})\} \\ & \times \dots \times \{1 + \phi(p_r) + \phi(p_r^2) + \dots + \phi(p_r^{a_r})\} = (A) \end{aligned}$$

என்ற வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளையாகும்.

$$\text{எனவே } \phi(d_1) + \phi(d_2) + \phi(d_3) + \dots + \phi(d_r)$$

$$= (A)\text{-ன் பெருக்கற்பலன்.}$$

$$\text{எனவே } 1 + \phi(p_1) + \phi(p_1^2) + \dots + p_1^{a_1-1}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + p_1 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) + p_1^2 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \\ &\quad + \dots + p_1^{a_1-1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + p_1 - 1 + p_1^2 - p_1 + p_1^3 - p_1^2 + \dots \\ &\quad + p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1} \\ &= p_1^{a_1}. \end{aligned}$$

அதேபோல

$$1 + \phi(p_1) + \phi(p_1^2) + \dots + \phi(p_1^{n_1}) = p_1^{n_1}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\text{எனவே } \phi(d_1) + \phi(d_2) + \phi(d_3) + \dots + \phi(d_n) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_n^{n_n} \\ = n$$

விளக்கம் :

மேற்கூறிய தேற்றத்தில் $n = 12$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

எனவே 12 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள், 1, 2, 3, 4, 6, 12 ஆகும்.

$$\phi(1) = 1$$

$$\phi(2) = 1$$

$$\phi(3) = 2$$

$$\phi(4) = 2$$

$$\phi(6) = 2$$

$$\phi(12) = 4$$

$$\therefore \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(6) + \phi(12) = \\ 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12 = n.$$

4.21. நிறையெண்கள் (Perfect Numbers)

ஒர் எண்ணை வகுக்கும் எண்களில், எடுத்துக்கொண்ட எண் தீங்கலாக மீதி எண்களைக் கூட்டினால் அக்கூட்டுத் தொகை பரவது எடுத்துக்கொண்ட எண்ணுக்குச் சமமானால், அம்மெண்ணையே நிறையெண் என்று அழைக்கிறோம்.

ஒரு நிறையெண்ணை வகுக்கக்கூடிய எல்லா எண்களையும் கூட்டினால், அக்கூட்டுத்தொகை நிறையெண்ணையேயாவ இரண்டு மடங்காக இருக்கும்.

6 என்பது ஒரு நிறையெண். 6 ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்கள், 1, 2, 3, 6 எனவே 6 ஐ விட்டுவிட்டுக் கூட்டினால் $6 = 1 + 2 + 3$ என்பது நிறையெண்ணின் வரையறையாகும்.

$$1 + 2 + 3 + 6 = 12 = \text{நிறையெண் 6-ன் இரு மடங்காகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$2^n - 1$ ஒரு பகா எண்ணாகில் $2^{n-1} (2^n - 1)$ என்பது ஒரு திறமையெண் என்று நிரூபி.

$N = p^a q^b = 2^{n-1} (2^n - 1)$ என எடுத்துக் கொண்டால் இவ்வு.

$$\left. \begin{aligned} p &= 2 & q &= 2^n - 1 \\ a &= (n-1) & b &= 1 \end{aligned} \right\}$$

எனவே N ஐ வகுக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= (1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}) (1 + q)$$

$$= \left(\frac{p^n - 1}{p - 1} \right) (1 + q)$$

$$= (2^n - 1) (1 + 2^n - 1)$$

$$= (2^n - 1) (2^n) = 2^n (2^n - 1)$$

$$= 2 \cdot 2^{n-1} (2^n - 1)$$

$$= 2 \cdot N = \text{எடுத்துக் கொண்ட } N\text{-ன் இருமடங்கு.}$$

எனவே N ஒரு திறமையெண்ணாகும்.

குறிப்பு:

$2^{n-1} (2^n - 1)$ -ல் n -க்கு வேறு வேறு மதிப்புகளைக் கொடுப்பதால் தனித்த திறமையெண்கள் கிடைக்கின்றன.

$n = 2$ ஆனால், $2^{n-1} (2^n - 1) = 2 (4 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$, திறமையெண்.

$n = 3$ ஆனால் $2^{n-1} (2^n - 1) = 4 (8 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$, திறமையெண்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

வகுக்கும் எண்களின் எண்ணிக்கை 80 ஆகக் கொண்ட மிகச் சிறிய எண்ணைக் காண்க.

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ ஆகும். 2, 3, 5-இவைகள் பகா எண்கள். இந்த மூன்று பகா எண்களுக்குமேல் இருக்க முடியாது.

80 ஆம் வகுப்பும் மிகச் சிறிய எண் N என்று எடுத்துக் கொண்டோம். எனவே $N = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ என இருக்கும். முதலாவதாக, மூன்று பகா எண்களை N பெற்றிருக்குமேயானால் N ஐ மீதியின்றி வகுக்கும் எண்களில் எண்ணிக்கை

$$= (1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)$$

$$= 80$$

எனவே, $\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = 1$ ஆகும்.

$$\therefore N = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 = 720 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இரண்டாவதாக,

இரண்டு பகா எண்களைக் கொண்டதாக இருப்பில் $80 = (1 + \alpha)(1 + \beta)$. எனவே α, β -இவற்றின் மதிப்புகள் 14, 1; 5, 4; 8, 2 ஆகும். இவற்றுள் ஏதாகிலும் ஒரு இயைபையப் பெற்று இருக்கும்.

எனவே $N = 2^{14} \cdot 3; 2^5 \cdot 3^4; 2^8 \cdot 3^2$. ஆகும். \dots (2)
மூன்றாவதாக,

ஒரே ஒரு பகா எண்ணைக் கொண்டு இருக்குமாதல்

$$(1 + \alpha) = 80 \quad \therefore \alpha = 79$$

$$\therefore N = 2^{79} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

(1), (2), (3) - இவைகளுள் மிகச் சிறிய எண் 720 ஆகும். எனவே 720 ஐ 80 மீதியின்றி வகுக்கும்.

4.22. ஒழுங்கெசவு: (Congruence)

a, b என்ற இரண்டு எண்களை m ஆல் வகுக்கும்போது மீதி சமமாக வருமாஒன் 'ம'-ன் மட்டின் மதிப்பிற்கு a, b ஒழுங்கெசவு வகுடயது என் கிறோம்.

இதை $a \equiv b \pmod{m}$ என்று எழுதலாம்.

$$a = pm + r$$

$$b = qm + r \quad \text{என இருக்குமானால்,}$$

$a - b = (p - q)m = km = (M)m$. ஆகும். இங்கு $k=0$, கூட்டு ஆம்வது குறை எண்ணாக இருக்கலாம்.

$$\text{எடுத்துக்காட்டாக, } 35 \equiv 14 \pmod{8}$$

$$29 \equiv 16 \pmod{6}$$

$$45 \equiv 3 \pmod{7}.$$

4.23. எச்சம் (Residue) :

$a \equiv b \pmod{m}$ என $ax = My$ ஆனால் m -ன் மீட்டர்மெண்ட்டு b , a -ன் எச்சம்; a , b -ன் எச்சம் எனப்படும்.

4.24. தேற்றம் 13 :

$$a \equiv b \pmod{x}, a_1 \equiv b_1 \pmod{x} \text{ ஆனால்}$$

$$(i) \quad a \pm a_1 \equiv b \pm b_1 \pmod{x},$$

$$(ii) \quad aa_1 \equiv bb_1 \pmod{x},$$

$$(iii) \quad ax \equiv bx \pmod{x},$$

$$(iv) \quad \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{x}; \quad c \text{ ஆனது } a, b\text{-ஐ மீதியின்றி}$$

வரும். இங்கு c -ய் x -ய் ஒன்றுக்கொன்று மாற என்னவாக இருத்தல் வேண்டும்.

தெரியு :

$$(i) \quad a \equiv b \pmod{x} \text{ ஆனால்}$$

$$a - b = kx; \text{ அதேபோல}$$

$$a_1 - b_1 = lx \text{ ஆகும்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a-b) \pm (a_1-b_1) &= kx \pm lx \\ &= (k \pm l)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a \pm a_1) - (b \pm b_1) &= (k \pm l)x \\ \therefore a \pm a_1 &\equiv b \pm b_1 \pmod{x} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad a \equiv b + kx, \quad a_1 \equiv b_1 + lx \text{ ஆகும்.}$$

$$\begin{aligned} \therefore aa_1 &= (b + kx)(b_1 + lx) \\ &= bb_1 + kb_1x + bx + klx^2 \\ &= bb_1 + M(x) \end{aligned}$$

$$\therefore aa_1 - bb_1 = M(x)$$

$$\therefore aa_1 - bb_1 = 0 \pmod{x}$$

$$aa_1 \equiv bb_1 \pmod{x}$$

$$(iii) \quad a = b + kx$$

$$\therefore ac = bc + (kx)c$$

$$ac - bc = M(x)$$

$$\therefore ac \equiv bc \pmod{x}$$

$$(iv) \quad a \equiv b \pmod{x}$$

$$a - b = M(x)$$

$$\text{ஆனால் } a = kc, b = k'c$$

$$\therefore a - b = kc - k'c = c(k - k') = M(x)$$

c -ம், x -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகர எண்கள்

$$\therefore k - k', x \text{ ஆகியவற்றின் வகுபடும்.}$$

$$\therefore \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = M(x)$$

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{x}$$

4-25. தேற்றம் 14 :

$x \equiv r \pmod{m}$ ஆனால் $f(x) \equiv f(r) \pmod{m}$ ஆகும்.
[$f(x)$ ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை ஆகும்.]

தெரியு :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$x \equiv r \pmod{m} \text{ ஆனால்}$$

$$x = pm + r$$

$$\therefore x^n = (pm + r)^n$$

$$= {}^nC_0 p^0 m^0 r^n + {}^nC_1 p^{n-1} m^{n-1} r + {}^nC_2 p^{n-2} m^{n-2} r^2 + \dots + r^n$$

$$\equiv M(m) + r^n$$

n -ன் மத்திய மதிப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= f(pm+r) \\
 &= a_0 + a_1(pm+r) + a_2(pm+r)^2 + \dots \\
 &\quad \dots + a_n(pm+r)^n \\
 &= a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots + a_nr^n + M(m) \\
 &= f(r) + M(m) \\
 \therefore f(x) &= f(r) + M(m)
 \end{aligned}$$

4-26. தேர்தம் 15 :

a, b ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால் $a, 2a, 3a, \dots$
 $(b-1)a$ ஐ b ஆல் வகுக்கும் போது வெவ்வேறு மீதிகள் வரும்.
 அனவகன் எப்படி. மாநி வரினும் $1, 2, 3, \dots, (b-1)$ -ல் தான்
 இருக்கும்.

தெரியு :

ஒருபுறமானால் $ra, sa, (r \neq s)$ என்ற இரண்டையும் b ஆல்
 வகுத்தால் இரண்டு எண்களுக்கும் மீதி k வரும் என்று எடுத்துக்
 கொண்டால்,

$$ra - k = M(b)$$

$$sa - k = M(b) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore (r-s)a = M(b).$$

a -ம், b -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

r -ம், s -ம் b ஐ விட மிகச் சிறியவை.

$$\therefore (r-s)a = l \times b \text{ என்றால்}$$

$$\left[\frac{r-s}{b} \right] a = l = \text{ஒரு முழு எண் எனக் கொள்வோம்.}$$

அதாவது, $\frac{r-s}{b}$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாக இருக்க
 வேண்டும். ஆனால் இது பொருத்தது. ஏனெனில் $r-s < b$
 ஆகும்.

ஆகையால், $\left(\frac{r-s}{b} \right)$ என்பது ஒரு முழு எண்ணாகத் த.

$$\therefore (r-s) \neq M(b).$$

$$\therefore (r-s)a \neq M(b) \text{ என்பது பொருத்தது.}$$

எனவே r_0, r_1 என்பவற்றை b ஆல் வகுக்கும்போது ஒரே மீதி வரும் என்பது பொருத்தது.

ஆகையால், r_0, r_1 என்பவற்றை b ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிதான் வரும்.

$\therefore a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ ஐ b ஆல் வகுத்தால், $(b-1)$ எண்கள் மீதிவாக வரும். அவைகள் ஒன்றுக்கொன்று வேறு மட்டவகையானவாகும். அந்த $(b-1)$ எண்கள் எந்த வரிசையில் இருந்தாலும், அவைகள் $1, 2, 3, \dots, (b-1)$ ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும்.

நினைத் தேற்றம் :

a, b ஒன்றுக் கொன்று பகா எண்களாகும். x ஏதாவதும் ஒர் எண். $x, (x+a), (x+2a), \dots, x+(b-1)a$ ஐ b ஆல் வகுக்கும் போது $0, 1, 2, \dots, (b-1)$ என்ற எண்கள் மீதிவாக, ஏதாவதும் ஒரு வரிசையில் வரும்.

4.27 தேற்றம் 16 :

பெர்மான் தேற்றம் (Fermat's Theorem) :

p ஒரு பகா எண். a -ம், p -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகில், $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ஆகும்.

தெரியு :

தேற்றம் 15-க்குத்து $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ ஐ b ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகள் வரும். அவைகள் எந்த வரிசையில் வந்தாலும், $1, 2, 3, \dots, (p-1)$ என்பவைகளே ஆகும். இவற்றை r_1, r_2, \dots, r_{p-1} எனக்கொண்டால், r_1, r_2, \dots, r_{p-1} என்பவை ஏதேனும் ஒரு வரிசையில் $1, 2, 3, \dots, (p-1)$ ஆகும்.

$$\therefore a \equiv r_1 \pmod{p}$$

$$2a \equiv r_2 \pmod{p}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(p-1)a \equiv r_{p-1} \pmod{p}$$

$$\therefore a, 2a, 3a \dots (p-1)a \equiv r_1, r_2, r_3 \dots r_{p-1} \pmod{p}$$

ஆதலது, $a^{p-1} \mid p-1 \equiv 1, 2, 3 \dots (p-1) \pmod{p}$

$$a^{p-1} \mid p-1 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(a^{p-1} - 1) \mid p-1 = M(p)$$

p ஒரு பகா எண். $p > (p-1), (p-2), \dots, 2, 1$.

$\therefore \mid p-1$ ஐ p ஆல் வகுக்க முடியாது.

$\therefore (a^{p-1} - 1) \mid p-1 \equiv 0 \pmod{p}$ என்ற முற்றொருமையில் p ஆல் $\mid p-1$ ஐ வகுக்க முடியாது. எனவே $(a^{p-1} - 1)$ -ஐ p ஆல் வகுக்க முடியும்.

$$\therefore a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

கிளைத்தேற்றம் 1 :

p ஒரு பகா எண். p -ம் a -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண் களானால்,

$(a^p - a)$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்க முடியும்.

ஏனெனில் $a^p - a = a(a^{p-1} - 1) = aM(p) = M(p)$ ஆகும்.

a -ம் p -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். இல்லாவிடில்,

$$a = M(p).$$

$$\therefore a(a^{p-1} - 1) = M(p).$$

கிளைத்தேற்றம் 2 :

p ஒற்றறப்படை. பகா எண். a -ம் p -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனில்,

$$a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

தெளிப்பு :

p ஒற்றறப்படை. என்ற ஆதலால்,

$$\begin{aligned} a^{p-1} - 1 &= [a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1][a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1] \\ &= M(p). \end{aligned}$$

p பகா எண்.

$$\therefore [a^{\frac{1}{2}(p-1)} - 1] = M(p)$$

$$\text{ஆகவே } [a^{\frac{1}{2}(p-1)} + 1] = M(p)$$

$$\therefore a^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{M(p)}$$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$$47^{7333} \equiv 11 \pmod{19} \text{ என்று காட்டுக.}$$

$$7333 = 18 \times 410 + 8$$

பெர்னாட் தேற்றம் மூலம்

$$47^{18-1} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\therefore 47^{18} \equiv 1 \pmod{19} \text{ ஆகும்}$$

$$\begin{aligned} \therefore 47^{7333} &= 47^{18 \times 410 + 8} \\ &= 47^{18 \times 410} \cdot 47^8 \end{aligned}$$

$$\therefore 47^{7333} \equiv 47^8 \pmod{19} \quad \dots \quad (1)$$

$$47 \equiv 9 \pmod{19}$$

$$\therefore 47^8 \equiv 9^8 \pmod{19} \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{ஆனால் } 9^2 \equiv 11 \pmod{19} \text{ ஆகும்} \quad \dots \quad (3)$$

$\therefore (1), (2), (3)$ -க்குத்து

$$47^{7333} \equiv 11 \pmod{19} \text{ ஆகும்.}$$

4-28. தேற்றம் 17 :

ஆய்லர் பொதுமையாக்கிய பெர்னாட் தேற்றம். (Euler's Extension of Fermat's theorem)

m ஏதாவதொரு எண். a -ம் m -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

தெரியு :

1, α , β , γ ... $(m-1)$ என்ற $\phi(m)$ எண்கள் m உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாகவும், m ஐ விடச் சிறியன வாகவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$a, a\alpha, a\beta, a\gamma, \dots, a(m-1)$ ஐ m ஆல் வகுத்தால் மீதி வெவ்வேறு எண்கள் வரும்.

முடியுமானால் ra, sa ஐ m ஆல் வகுக்கும்போது இரண்டிற்கும் மீதி k வகுமையில்

$$ra - sa = M(m)$$

$$\therefore (r - s) a = M(m) \text{ ஆகும்.}$$

இது பொருத்தது. ஏனெனில் a -ம் m -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். a ஐ m ஆல் வகுக்க முடியாது. மேலும், r -ம், s -ம் m ஐ விடக் குறைவானவை. ஆகையால் $(r - s)$ -ம் m ஐ விடக் குறைவானது. எனவே $(r - s)$ ஐயும் m ஆல் வகுக்க முடியாது.

$$\therefore (r - s) a = M(m)$$

எனவே ra, sa ஐ m ஆல் வகுத்தால் வெவ்வேறு மீதிகளை வரும். இம்மீதிகள் m உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

எனவே $a, a\alpha, a\beta, a\gamma, \dots, a(m-1)$ என்ற $\phi(m)$ எண்களை m ஆல் வகுக்கும் போது வரும் மீதிகள் m உடன் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாயும் வெவ்வேறு மதிப்புடையனவாயும் இருக்கும்.

எனவே இம்மீதிகள் ஏதாவது ஒரு வரிசையில் $1, \alpha, \beta, \dots, (m-1)$ என்ற $\phi(m)$ எண்களாகும். $a, a\alpha, a\beta, \dots, a(m-1)$ என்பவற்றை m ஆல் வகுத்து வரும் மீதிகள் $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{\phi(m)}$ எனக் கொண்டால் இவை ஏதேனும் ஒரு வரிசையில், $1, \alpha, \beta, \dots, (m-1)$ ஆகும்.

$$a = r_1 \text{ (மட்டு } m)$$

$$a\alpha = r_2 \text{ (மட்டு } m)$$

$$a\beta = r_3 \text{ (மட்டு } m)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a(m-1) = r_{\phi(m)} \text{ (மட்டு } m)$$

$$\therefore a, a\alpha, a\beta, \dots, a(m-1) = r_1, r_2, \dots, r_{\phi(m)} \text{ (மட்டு } m)$$

அதாவது $a, a\alpha, a\beta, \dots, a(m-1) = 1, \alpha, \beta, \dots, (m-1)$ (மட்டு m)

$\therefore a^{\phi(m)} (1, \alpha, \beta, \dots, m-1) \equiv 1, \alpha, \beta, \dots, (m-1)$
(மட்டு m).

இதன்கு பக்கங்களை எழல் $1, \alpha, \beta, \dots, (m-1)$ ஆக வகுக்க,

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \text{ (மட்டு } m)$$

{ஏனெனில் $1, \alpha, \beta, \dots$ இவை ஒவ்வொன்றும் m உடன்
பகா எண்கள். $\therefore 1, \alpha, \beta, \dots, (m-1), m$ உடன் பகா எண்.}

செய்தேதற்றம் :

m -ம், p -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால் $\phi(m) \sim p-1$,
எனவே $a^{p-1} \equiv 1$ (மட்டு p) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

x -ம், y -ம் 1865 ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$$x^{18} - y^{18} \equiv 0 \text{ (மட்டு 1865) என்று நிறுவுக}$$

$$1865 = 13 \times 7 \times 5 \times 8.$$

x -ம், 1865-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

ஆகவே x -ம், 18-ம் கூட, ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$$\therefore x^{18} \equiv 1 \text{ (மட்டு 18)} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

y -ம் 1865-ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$$\therefore y^{18} \equiv 1 \text{ (மட்டு 18)} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore (1) - (2)$$

$$\therefore x^{18} - y^{18} \equiv 0 \text{ (மட்டு 18)} \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$x^{18} - y^{18} = (x^6 - y^6) (x^6 + y^6).$$

ஆனால், ஒவ்வொருவே,

$$x^6 - y^6 \equiv 0 \text{ (மட்டு 7) ஆகும்.}$$

$$\therefore x^{18} - y^{18} \equiv 0 \text{ (மட்டு 7) } \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$x^{18} - y^{18} = (x^6 - y^6) (x^6 + x^4 y^2 + y^6)$$

$$x^6 - y^6 \equiv 0 \text{ (மட்டு 5) } \dots \quad \dots \quad (5)$$

$$\therefore x^{17} - y^{17} = (x^5 - y^5)(x^5 + x^5 y^5 + y^5)(x^5 + y^5).$$

$$\therefore x^5 - y^5 = 0 \text{ (மட்டு 5)} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

$$\therefore (3), (4), (5), (6)\text{-விகிதம்,}$$

$$x^{17} - y^{17} = 0 \text{ (மட்டு 1365).}$$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

8 ஆவது படியுள்ள எந்த எண்ணையும் $17m$ அல்லது $17m + 1$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம் என்று காட்டுக.

N என்ற ஏதாசிலும் ஓர் எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால், N -ம் 17 -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள் எனில்,

$$\therefore N^{17} = 1 \text{ (மட்டு 17)}$$

$$(N^8 + 1)(N^8 - 1) = 0 \text{ (மட்டு 17)}$$

$$\therefore N^8 + 1 = M(17), \text{ அல்லது } N^8 - 1 = M(17)$$

$$\therefore N^8 = 17m - 1 \text{ அல்லது } N^8 = 17m + 1 \text{ ஆகும்.}$$

N -ம் 17 -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களாக இக்காலியில்

$$N = M(17).$$

$$\therefore N^8 = 17m.$$

$\therefore N^8$ ஐ $17m$ அல்லது $17m + 1$ என்ற அமைப்பில் எழுதலாம்.

4.29 விகித தேற்றம் (Wilson's Theorem) 18 :

p ஒரு பகா எண்ணாகின் $(p-1)! + 1 = M(p)$ ஆகும்.

தெரிவு :

a ஏதாசிலும் ஓர் எண்; p ஐ விடச் சிறியது. $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ ஐ p ஆல் வகுக்கும்போது அமைகள் வெவ்வேறு எண்களை மீதிகளாகத் தரும். அமைகள் ஏதாசிலும் ஒரு வரிசையில் அமையும். ஆனால் அமைகள் எந்த வரிசையில் அமைந்தாலும், $1, 2, 3, \dots, (p-1)$ என்ற எண்களையே கொண்டிருக்கும்.

எனவே, a ஐ $1, 2, 3 \dots (p-1)$ என்ற ஏதோ ஒர் எண்ணால் பெருக்கி p ஆல் வகுத்தால் 1 மீதி வரும். என்கிற a, b என்னு எடுத்துக் கொள்ளுவோம்.

$$\therefore ab \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$ab - 1 \equiv M(p).$$

இத்தக கூட்டுப்பாட்டில் எத்த நிலையில் $a = b$ எனப் பார்க்க வேண்டும்.

$$a^2 - 1 \equiv M(p).$$

$$(a+1)(a-1) \equiv M(p).$$

$a < p$ ஆகையால் $a-1 = 0$ ஆவதது $a+1 = p$

$\therefore a = 1$ ஆவதது $a = p-1$ ஆகும். எனவே $1, (p-1)$ என்பவற்றின் இருபடிக்களை மட்டுமே p ஆல் வகுத்தால் 1 மீதிவாக வரும்.

$1, 2, 3, \dots (p-1)$ என்ற எண் வரிசையில் $1, (p-1)$ ஐ விலக்கி $2, 3, 4, \dots (p-2)$ என்ற $(p-3)$ எண்களையும் சோடி, களாக, ஒவ்வொரு சோடியின் பெருக்குத் தொகையையும் p ஆல் வகுத்து வரும் மீதி 1 என வரும்படி மிடுக்கலாம்.

$$\text{எனவே } 2, 3, 4, \dots (p-2) \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\therefore [2, 3, 4, \dots (p-2)](p-1) \equiv (p-1) \pmod{p}$$

$$\therefore \underline{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$$

$$\therefore \underline{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

4.30. மறுதலை:

$$\underline{n-1} + 1 \equiv M(n) \text{ ஆனால் } n \text{ ஒரு பகா எண்ணாகும்.}$$

தெரியு:

n ஒரு பகா எண்ணாக இவ்வாறிலில் $1, 2, 3 \dots (n-1)$ என்ற ஏதாவதொரு எண்ணால் வகுப்படக் கூடும். அப்படி வகுக்கக் கூடிய எண் $\underline{n-1}$ ஐ மீதியின்றி வகுக்கும்.

$$\therefore \left(\frac{n-1}{n} + 1 \right) \text{ ஐ மீதியின்றி வகுக்காது.}$$

இ. க. - 36

ஆனால் $n-1 \cdot -1 = M(p)$. எனவே n -ன் எந்தக் காரணி மீனாலும் வகுபடும். ஆனால் இது பொருத்தாத முடிவாகையால் n ஒரு பகா எண் ஆகை என்பது பொருத்தது. ஆகையால் n ஒரு பகா எண்ணாகவேதான் இருக்க முடியும்.

குறிப்பு :

$n = 1$ (மட்டு p) என்ற முற்றொருமையில் a, b என்ற இரண்டும் தொடர்புடைய எச்சங்கள் (associated residues) எனப்படும்.

4.31. தேற்றம் 19 :

பொதுமைப்படுத்திய வில்சன் தேற்றம் (Generalisation of Wilson's Theorem)

p ஒரு பகா எண்: $r < p$ ஆனால் $\underline{p-r}, \underline{r-1} + (-1)^{r-1} = 0 \pmod{p}$.

தேசீப்பு :

$\underline{p-1} + 1 = M(p)$ என்பதை வில்சன் தேற்றமாகும்.

$$\therefore 1.2.3 \dots (p-r)(p-r-1) \dots (p-1) + 1 = M(p).$$

$\therefore [1.2.3 \dots (p-r)(p-r-1) \dots (p-1) - 1 \pmod{p}]$
 $(p-r)$ என்ற உறுப்பிற்கும் சீக்கி p -ன் மடங்குகளை நீக்கினால்,

$$[1.2.3 \dots (p-r)](-1)^{r-1} \underline{r-1} = -1 \pmod{p}.$$

$$\therefore \underline{p-r} \cdot (-1)^{r-1} \cdot \underline{r-1} = -1 \pmod{p}.$$

$$p-r \cdot \underline{r-1} = (-1)^r \pmod{p}.$$

$$\therefore \underline{p-r} \cdot \underline{r-1} = (-1)^r = M(p).$$

$$p-r \cdot \underline{r-1} + (-1)^{r-1} = M(p).$$

வெளித்தேற்றம் :

(i) $r-1 = p-r$ ஆனால் ஒவ்வொன்றும்,

$$= \frac{1}{2} [(r-1) + (p-r)] = \frac{1}{2} (p-1)$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{2} (p-1) \right\}^2 + (-1)^{1+\frac{1}{2}(p-1)} = 0 \pmod{p}$$

$$(ii) \quad p = 4n+1, \text{ ஆனால் } \frac{1}{2} (p-1) = 2n.$$

$$\therefore \left\{ \left[\frac{1}{2} (p-1) \right] \right\}^2 + 1 = 0 \pmod{p}$$

$$(iii) \quad p = 4n-1 \text{ ஆனால் } \frac{1}{2} (p-1) = 2n-1$$

$$\left\{ \left[\frac{1}{2} (p-1) \right] \right\}^2 - 1 = 0 \pmod{p}$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$(4n+1)$ ஒரு பகா எண் என்றால் $\left[\left[\frac{2n}{1} \right] \right]^2 + 1 = M(4n+1)$ என்ற சிறுவை.

$4n+1 = p$ என எடுத்துக் கொள்வோம். $(4n+1)$ ஒரு பகா எண். அதாவது p ஒரு பகா எண்.

$$\therefore \left[\frac{p-1}{2} \right] + 1 = M(p) \text{ என்பது மிகச்சிறு தேற்றம்.}$$

$$\text{எனவே, } \left[\frac{(4n+1)-1}{2} \right] + 1 = M(p).$$

$$\left[\frac{4n}{2} \right] + 1 = M(p).$$

$$\therefore [1, 2, 3 \dots \dots 2n \cdot (2n+1) (2n+2) \dots (2n+2n)] + 1 = M(p)$$

$$\therefore \left[\frac{2n}{1} [(2n+1) (2n+2) \dots (2n+2n)] \right] + 1 = M(p) \dots (A)$$

$$\text{இதிலு, } 2n+1 = \left[\sqrt{4n+1} - 2n \right] = (p-2n)$$

$$2n+2 = \left[\sqrt{4n+1} - 2n-1 \right] = (p-2n-1)$$

$$\begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$2n+2n = \left[\sqrt{4n+1} - 1 \right] = (p-1)$$

எனவே, (A) ஆனது

$$\left[\frac{2n}{1} [(p-2n) (p-2n-1) \dots (p-1)] \right] + 1 = M(p)$$

எனவும்.

p -ன் மடங்குகளை நீக்குவதால், நமக்கு

$\lfloor \frac{2n}{p} \rfloor [(-1)^{2n/p}, 1, 2, 3 \dots \dots 2n] + 1 = M(p)$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\lfloor \frac{2n}{p} \rfloor, \lfloor \frac{2n}{p} \rfloor + 1 = M(p),$$

$$\therefore \lfloor \lfloor \frac{2n}{p} \rfloor \rfloor + 1 = M(p),$$

$$\text{அதாவது, } \lfloor \lfloor \frac{2n}{p} \rfloor \rfloor + 1 = M(4n+1)$$

4.32 தேற்றம் 20 :

இலக்கரஸ்தீயின் தேற்றம் (Lagrange's Theorem).

p ஒரு பகர் என்க. r என்பது ஏதாவது ஓர் எண், $(p-1)$ ஐ விடக் குறைவானது என்கும்,

$$(x+1)(x+2) \dots (x+p-1) = x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + S_2 x^{p-3} + \dots \dots + S_{p-1}$$

$S_1, S_2, S_3, \dots \dots S_{p-1}$ ஒவ்வொன்றும் p ஆல் மீதியின்றி வரும்.

தெரியு:

$$f(x) = (x+1)(x+2) \dots (x+p-1) \text{ ஆனால்}$$

$$f(x) = x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + S_2 x^{p-3} + \dots + S_{p-1}$$

மேலும், $f(x) [x+p] = (x+1) f(x+1)$

$$\begin{aligned} \therefore (x+p) (x^{p-1} + S_1 x^{p-2} + S_2 \dots + S_{p-1}) \\ = (x+1)^p + S_1 (x+1)^{p-1} + S_2 \dots \\ \dots + S_{p-1} (x+1) \dots \quad (I) \end{aligned}$$

சமைய் கொடுக்களை இருபக்கங்களிலும் சமன் செய்தால்,

$$pS_1 = pC_2 + S_1^{p-1}C_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$pS_2 = pC_3 + S_1^{p-1}C_2 + S_2^{p-2}C_1 \dots \dots (2)$$

$$pS_3 = pC_4 + S_1^{p-1}C_3 + S_2^{p-2}C_2 + S_3^{p-3}C_1 \quad (3)$$

$$\begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$$pS_{p-1} = pC_{p-1} + S_1^{p-1}C_{p-2} + \dots + S_{p-1}^pC_1$$

(1)-ல் இடக்கைப் புறம் = pS_1 ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். எனவே வலக்கைப் புறம் p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். p ஒரு பகா எண். எனவே pC_1 ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். எனவே, $S_1^{p-1}C_{p-2}$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். ஆனால் $p-1$ C_1 -ம் p -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள். எனவே S_1 ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

(2)-ல் இடக்கைப் புறம் p ஆல் வகுபடும். எனவே வலக்கைப் புறமும் p ஆல் வகுபடும். pC_2 -ம் S_1 -ம் p ஆல் வகுபடும். எனவே $S_2 \cdot p - 2C_1$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம். ஆனால் $p - 2C_1$ p பகா எண்கள். ஆகையால் S_2 ஆனது p ஆல் வகுபடும்.

இவ்வாறே S_3, S_4, \dots, S_{p-2} என்பவை p ஆல் வகுபடும் என்று நிறுவலாம்.

நினைத்தேற்றம் :

(i) x^2 -ன் கொடுமை p -க்குத்து இரு பக்கங்களிலும் சமன் செய்வதால்,

$$pS_{p-1} = 1 + S_1 + S_2 + \dots + S_{p-2} + S_{p-1}$$

$$(p-1)S_{p-1} = 1 + S_1 + S_2 + \dots + S_{p-2}$$

ஆனால் $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{p-2}$ ஐ p ஆல் மீதியின்றி வகுக்கலாம்.

$$\therefore (p-1)S_{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

$$-S_{p-1} + 1 \equiv 1 \pmod{p},$$

$$S_{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\therefore -S_{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (\text{விச்சன் தேற்றம்})$$

(ii) ஏதாவதொரு எண் x -ம், p -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்களானால், $(x+1), (x+2), \dots, (x+p-1)$ என்ற எண்களில் ஏதாவது ஒர் எண் p ஆல் வகுபடும்.

$$f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+p-1) \text{ எனில்,}$$

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$\text{மேலும் } f(x) = x^{p-1} + S_{p-1} \pmod{p} \quad \dots \quad (A)$$

$$= x^{p-1} + \underline{p-1} \pmod{p}$$

$$\underline{p-1} = -1 \pmod{p}.$$

$$\therefore f(x) = x^{p-1} - 1 \pmod{p}. \quad \dots \quad (B)$$

(A), (B)-விருத்து,

$$x^{p-1} - 1 = 0 \pmod{p}. \quad (\text{பெர்மட் தேற்றம்})$$

மக்வேறு எடுத்துக்காட்டுகள் :

எடுத்துக்காட்டு 14 :

1000-க்குக் குறைவான பகா எண்கள் எத்தனை ?

$$1000 = 2^3 \cdot 5^3.$$

தேற்றம் 11 மூலம்,

1000 ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் எண்ணிக்கை

$$= \phi(1000)$$

$$= 1000 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = 400.$$

$$\therefore \phi(1000) = 400.$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$$16^{23} - 1 = N(487) \text{ என்று திறவுக.}$$

$487 = 19 \times 25$. இரண்டு எண்ணும் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்,

$$\phi(487) = 487 \left(1 - \frac{1}{19}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right)$$

$$= 487 \times \frac{18}{19} \times \frac{24}{25}$$

$$= 896.$$

$$\therefore 16^{22} = (2^4)^{22} = 2^{88} = 2^{2(437)}$$

$$\therefore 2^{2(437)} - 1 = 0 \text{ (மட்டு 437)} \quad (\text{தேற்றம் 17})$$

$$\therefore 16^{22} - 1 = M(437)$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$\lfloor 16 = x$ (மட்டு 28) என்றால் x -ன் மதிப்பு என்ன ?
28 மீதா என்ற ஆதாரம்,

$$\lfloor 28 = (-1) \text{ (மட்டு 28)}$$

ஆதாவது $\lfloor 16, 19, 20, 21, 22 = (-1) \text{ (மட்டு 28)}$

$$\lfloor 16 = (28-4)(28-8)(28-2)(28-1) = (-1) \text{ (மட்டு 28)}$$

$\lfloor 16$ ஐ எடுத்து வரும் காரணிகளிலிருந்து 28-ன் மட்டுகளை நீக்கினால்,

$$\lfloor 16 = (1, 2, 8, 4) = (-1) \text{ (மட்டு 28)}$$

$$\lfloor 16 = 24 = (-1) \text{ (மட்டு 28)}$$

$$\lfloor 16 = 24 + 1 = M(28);$$

$$\lfloor 16 = 28 + \lfloor 16 + 1 = M(28)$$

$$\therefore \lfloor 16 + 1 = M(28)$$

$$\lfloor 16 = -1 \text{ (மட்டு 28)}$$

எனவே $x = -1$; பொதுவாக $x = 28n - 1$, n ஒரு முழு எண்.

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$$\lfloor 28 + 288 = M(288) \text{ என்று நினைவு.}$$

$$288 = 29 \times 91.$$

$$\lfloor 28 + 1 = M(29) \quad (\text{விச்சை தேற்றம்})$$

$282 = 3 \times 29$, 29-ல் மடங்குகை கூட்டுவதால்

$$| 28 + 282 + 1 = M(29),$$

$$| 28 + 289 = M(29), \quad \dots \quad (1)$$

$$| 30 + 1 = M(31)$$

$$30, 29, | 28 + 1 = M(31)$$

$$(-1)(-2) | 28 + 1 = M(31)$$

$$2 | 28 + 1 = M(31)$$

31 ஐக் கூட்டினால்,

$$2 | 28 + 28 = M(31)$$

$$\therefore | 28 + 16 = M(31)$$

$217 = 7 \times 31$, 31-ல் மடங்குகை கூட்டினால்,

$$| 28 + 217 + 16 = M(31)$$

$$\therefore | 28 + 239 = M(31) \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2)-ஐருத்து,

$$| 28 + 239 = M(29 \times 31)$$

$$\therefore | 28 + 266 = M(269)$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$2^s + 1$ ஒரு பகா எண் எனில் n ஆனது 2^s -ன் படி என நிறுவுக.

n ஆனது 2^s -ல் படியாக இல்லாவிடில்

$$n = 2^r N \text{ என்க,} \quad (N \text{ ஒத்தற்பெண். என்க})$$

$$2^s + 1 = \left(2^{s^r} \right)^N + 1 = a^N + 1, \quad \text{இங்கு } a = 2^{s^r}$$

N ஒத்தற்பெண். எண்ணுகையால் $a^N + 1$ -க்கு $(a+1)$ என்ற காரணி உண்டு.

$\therefore (2^n + 1)$ -க்கு $2^{2^r} + 1$ என்ற காரணி உண்டு.

$2^{2^r} + 1 = 1$ அல்லது $2^n + 1$; ஏனெனில் $(2^n + 1)$ ஒரு பகா எண்.

$\therefore 2^{2^r} + 1 = 1, \quad \therefore 2^{2^r} = 0$. இது பொருத்ததாது.

$\therefore 2^{2^r} + 1 = 2^n + 1, \quad \therefore n = 2^r$ பொருத்தா முடிவு.

$\therefore 2^n + 1$ என்ற பகா எண்ணில் ' n ', 2 -ன் படியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 18 :

n என்ற பகா எண் 18ஐ விடப் பெரியதாக இருக்குமாக்கி $n^{12} - 1 = M(65520)$ என்று திருப்தி.

$$65520 = 16 \times 7 \times 5 \times 3^2 \times 2^4.$$

$$n^{12} \equiv 1 \pmod{18} \quad (\text{பெர்மட் தேற்றம்}) \dots \dots (1)$$

$$\text{ஆனால் } n^{12} - 1 = (n^3 - 1)(n^3 + 1).$$

$$n^3 - 1 \equiv 0 \pmod{7}, \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$n^{\phi(7)} \equiv 1 \pmod{7}.$$

$\phi(8) = 4$ (1, 2, 4, 5, 7, 8 என்ற எண்கள் 8-ஐ விடச் சிறியவை; 8 ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்)

$$\therefore n^4 \equiv 1 \pmod{8}.$$

$$\therefore n^{12} \equiv 1 \pmod{8} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$4m, 4m+1, 4m-1, 4m+2$ என்ற அமைப்பில் n இருக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட எண் ஒரு பகா எண்; மேலும் 18ஐ விடப் பெரியது. எனவே $4m+1$ என்ற அமைப்பில் இருக்க வேண்டும்.

$$n^2 = (4m+1)^2 = M(8) + 1$$

$$n^4 = [M(8) + 1]^2 = M(16) + 1$$

$$n^4 \equiv 1 \pmod{16},$$

$$n^{12} - 1 = (n^4 - 1)(n^8 + n^4 + 1),$$

$$\therefore n^{12} \equiv 1 \pmod{16}. \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

மேலும் $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$

$$n^{12} \equiv 1 \pmod{5} \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

$\therefore (1), (2), (3), (4), (5)$ -வினாக்கள்

$$n^{12} \equiv 1 \pmod{66660}.$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

n ஒத்தையெண் எனில், $(n^2 + 3)(n^2 + 7) = M(32)$ என
நிறுவுக.

$$\phi(4) = 2.$$

$$\therefore n^{\phi(4)} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\therefore n^2 - 1 = M(4).$$

$$n^2 - 1 + 4 = M(4).$$

$$\therefore n^2 + 3 = M(4). \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

அதேபோல, $\phi(8) = 4.$

$$\therefore n^{\phi(8)} \equiv 1 \pmod{8}.$$

$$n^{\phi(8)} - 1 = M(8).$$

$$n^4 - 1 = M(8).$$

$$(n^2 + 1)(n^2 - 1) = M(8).$$

$$n^2 + 1 = n^2 + 3 - 2 = M(4) - 2 : 8 \text{ ஆக வகுக்கிறது.}$$

$$\therefore n^2 - 1 = M(8).$$

$$n^2 - 1 + 8 = M(8)$$

$$n^2 + 7 = M(8). \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) விருத்து.

$$(n^2 + 8)(n^2 + 7) = M(82).$$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

n ஒரு பகாபெண். n, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$$m^{n-1} + n^{n-1} - 1 = M(mn) \text{ என திருவுக.}$$

n ஒரு பகாபெண். $\therefore \phi(n) = (n-1)$

m, n ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்.

$$\therefore m^{n-1} - 1 = M(n) \quad (\text{ஐபர்மர்ட் தேற்றம்})$$

$$\therefore n^{n-1} + m^{n-1} - 1 = M(n) \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$n^{n-1} - 1 = M(m) \quad (\text{ஐபர்மர்ட் தேற்றம்})$$

$$\therefore m^{n-1} + n^{n-1} - 1 = M(m) \quad \dots \dots \dots (2)$$

(1), (2)-விருத்து

$$m^{n-1} + n^{n-1} - 1 = M(mn).$$

எடுத்துக்காட்டு 22 :

p ஒரு பகா எண். $2 \mid p-3 + 1 = M(p)$ எனக் காண்க.

p ஒரு பகா எண். $\therefore \mid p-1 + 1 = M(p)$

$$(p-1)(p-2) \mid p-3 + 1 = M(p).$$

$$\mid p-3 [M(p) + 2] + 1 = M(p).$$

$$2 \mid p-3 + 1 + M(p).$$

எடுத்துக்காட்டு 23 :

$8^{1n} + 24n - 1 = 0$ (மட்டு 22) என்று தொடக்கச் சூத்திரம் மீறலா ஆகலது வேறு சூத்திரமீறலா திருபிக்க.

$$f(n) = 8^{1n} + 24n - 1 \text{ ஆனால்}$$

$$f(n+1) = 8^{1(n+1)} + 24(n+1) - 1$$

$$= 8^{1n+1} + 24(n+1) - 1$$

$$= 8^{1n+1} + 24n + 23.$$

$$\begin{aligned}
 f(n+1) - 2f(n) &= 24n(1-2) + 32 \\
 &= 32 - 48n \\
 &= M(32).
 \end{aligned}$$

$$\text{அதாவது } f(n+1) = 2f(n) + M(32)$$

ஆகவே, $f(n)$ ஆனது 32-ன் மடங்கு எனில், $f(n+1)$ -ன் 32-ன் மடங்காகும்.

$$\text{இப்பொழுது } f(1) = 8^1 + 24 - 1 = 32.$$

$$\begin{aligned}
 f(2) &= 8^2 + 24 \cdot 2 - 1 \\
 &= 128 = M(32).
 \end{aligned}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\text{எனவே } f(n) = 8^{2n} + 24n - 1 = M(32).$$

எடுத்துக்காட்டு 24 :

$2^r - 1$ -ல் 2 எந்த பகர எண்ணின் மிகப் பெரிய படி யாகும்?

$$I_1 = I\left(\frac{2^r - 1}{2}\right) = 2^{r-1} - 1 \quad (\text{தேற்றம் 8})$$

$$I_2 = I\left(\frac{2^r - 1}{2^2}\right) = 2^{r-2} - 1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$I_{r-1} = I\left(\frac{2^r - 1}{2^{r-1}}\right) = 2^1 - 1$$

\therefore $2^r - 1$ -ல் 2 தேர்ந்தும் மிகப் பெரிய படி

$$= I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_{r-1}$$

$$= [2^{r-1} + 2^{r-2} + \dots + 2^1] = (r-1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot \left(\frac{2^{r-1} - 1}{2 - 1} \right) = r + 1 \\
 &= 2(2^{r-1} - 1) = r + 1 \\
 &= 2^r - r - 1
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 25 :

$$8^{4n+3} + 5^{4n+1} = M(14) \text{ என்று காட்டுக.}$$

தொடக்கி முதலில் இதை நிரூபிக்கலாம்.

$$f(n) = 8^{4n+3} + 5^{4n+1} \text{ என்று எடுத்துக் கொண்டால்}$$

$$\begin{aligned}
 f(n+1) &= 8^{4(n+1)+3} + 5^{4(n+1)+1} \\
 &= 8^{4n+7} + 5^{4n+5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(n+1) &= 85 f(n) \\
 &= 8^{4n+1} (8^4 - 5^4) 8^{4n+2} \cdot 58 \\
 &= M(58) \\
 &= M(14).
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(n+1) = 85 f(n) + M(14)$$

ஆகவே $f(n)$ ஆனது 14-ன் மடங்கு எனில், $f(n+1)$ -ம் 14-ன் மடங்காகும்.

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(1) + 8^3 + 5^1 &= & 728 + 125 &= & 853 &= & M(14) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

ஆகவே தொகுமுறைப்படி

$$f(n) = 8^{4n+3} + 5^{4n+1} = M(14)$$

எடுத்துக்காட்டு 26 :

n ஒரு பகா எண். n -ம் N -ம் ஒன்றுக்கொன்று பகா எண்கள்

$$N^{n^2-n} - 1 = M(n^2) \text{ ஆகும்.}$$

n ஒரு பகா எண்.

$$N^{n-1} - 1 = M(n) \quad (\text{பெர்னாட் தேற்றம்})$$

$$\therefore N^{n-1} = 1 + M(n)$$

$$[N^{n-1}]^n = [1 + M(n)]^n$$

$$N^{n^2-n} = 1 + n M(n) + \frac{n(n-1)}{1.2} [M(n)]^2 + \dots$$

$$= 1 + M(n^2)$$

$$[N^{n^2-n}]^n = [1 + M(n^2)]^n$$

$$N^{n^3-n^2} = 1 + n M(n^2) + \frac{n(n-1)}{1.2} [M(n^2)]^2 + \dots$$

$$= 1 + M(n^3)$$

$$\therefore N^{n^3-n^2} - 1 = M(n^3).$$

எடுத்துக்காட்டு 27 :

ஏதாவது ஒர் எண் ' N ' டி 12-ஐ அனல் கூத்த எண் 12n அல்லது 12n+1 என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

' N ' என்ற எண் 12-ன் மடங்காவதோ அல்லது 12 ஓடு பதா எண்ணாகவோ இருக்கும்.

$$N, 12\text{-ன் மடங்காவதில், } N^{12} = M(12).$$

$$\therefore N^{12} = 12n \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{அல்லது } N^{12} - 1 = M(12) \quad (\text{பெர்னாட் தேற்றம்})$$

$$\therefore N^{12} - 1 = 12n.$$

$$\therefore N^{12} = 12n + 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2)-யிலிருந்து,

$$N^{12} = 12n \text{ அல்லது } 12n + 1$$

பயிற்சி 4

1. கீழ்வரும் எண்களைப் பகர எண்களின் பெருக்குத் தொகையாகக் காண்பி.
(i) 9450 (ii) 29645 (iii) 4586 (iv) 15456
2. 360; 4116 என்பவற்றை மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை? அவைகளில் கூட்டுத் தொகை என்ன?
3. (i) 88000 (ii) 810000 (iii) 5145000-இவற்றை மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை? அவைகளில் கூட்டுத் தொகை என்ன?
4. 1545-ஐ மீதியின்றி வகுக்கக்கூடிய எண்கள் எத்தனை?
5. $\lfloor 300 \rfloor$ -ல் 7-ன் மிகப் பெரிய படி என்ன?
6. $128, 127, 126 \dots 1000$ -ல் 11-ன் மிகப் பெரிய படி என்ன?
7. 2, 5, 7, 11, 13 என்ற எண்கள் எத்தப் படிகளில்
(i) $\lfloor 100 \rfloor$ (ii) $\lfloor 500 \rfloor$ தோன்றும்?
8. (i) $\lfloor 60 \rfloor$ (ii) $\lfloor 101 \rfloor$ (iii) $\lfloor 256 \rfloor$ என்ற எண்கள் எத்தனை முக்கியங்களோடு முடிகின்றன?
9. $\phi(n)$ ஓர் இரட்டையான n -ன் எனவும், n -க்குக் குறைவாக n ஓடு ஒன்றுக்கொன்று பகர எண்களாகவுள்ள எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2} n \times \phi(n)$ எனவும் நிறுவுக.
10. $\lfloor 155 \rfloor$ என்ற எண்ணில் 5 எத்தப் படிகளில் தோன்றும்?
11. $8n+1 - 7n + 41 = M(4n)$ என நிறுவுக.
12. n ஒற்றையான எண்ணானால், $n^2 + 4n^2 + 11 = M(16)$ என நிறுவுக.
13. $7^{2n} + 16n - 1 = M(84)$ என நிறுவுக.

14. $3^{2n} - 8n - 1 = M(64)$ என நிறுவுக.
15. $8^{2n-1} + 8^{2n-1} = 0$ (மட்டு 17) என நிறுவுக.
16. $2^{2n+1} + 1 = M(8)$ என நிறுவுக.
17. n ஓர் ஒத்தற்பவன். எண்ணுவின் $n(n^2-1) = M(24)$ என நிறுவுக.
18. $3^{2n+1} + 2^{2n+1} = M(7)$ என நிறுவுக.
19. $2^{2n} - 8n - 1 = M(8)$ என நிறுவுக.
20. $n(n^2 - 1)(28n^2 + 4) = M(120)$ என நிறுவுக.
21. $n^2 - n = M(30)$ என நிறுவுக.
22. 8, 7, 6, 5 ஆல் வகுத்தால் மூன்றையே 5, 4, 3, 2 மீதி வரும் மிகச் சிறிய எண்ணைக் காண்க.
23. 6, 5, 4, 3 ஆல் வகுத்தால் மூன்றையே 5, 4, 3, 2 மீதி வரும் மிகச் சிறிய எண்ணைக் காண்க.
24. 8, 5, 7 ஆல் வகுத்தால் மூன்றையே 2, 3, 2 மீதி வரும், மிகச் சிறிய இரண்டு எண்ணைக் காண்க.
25. 2, 3, 4, 5, 6 ஆல் வகுத்தால் 1 மீதி வரும், 7-ன் மடங்கான எண்ணைக் காண்க.
26. 2^{10} ஐ 47 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன?
27. 2^{100} ஐ 17 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன?
28. (1) 7^{100} , (2) 8^{100} , (3) 8^{100} ஐ மூன்றையே 127; 131; 101 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன?
29. (i) $2^{47} = 1$ (மட்டு 47) (ii) $2^{47} = 1$ (மட்டு 314) என நிறுவுக.
30. 2^{47} ஐ 47 ஆல் வகுத்தால் மீதி என்ன?
31. ஓர் எண்ணின் டிடி 3 ஆக இருப்பின், அந்த எண் $7m$, அல்லது $7m \pm 1$ என்ற அமைப்பிற்குக்குரிய நிறுவுக.

32. ஒர் எண்ணின் படி 11 ஆக இருப்பின், அத்த எண் 28n ஆய்வது $28n + 1$ என்ற அமைப்பிற்குத் துன்புண்டாகிறது.

33. $x^2 - x = M(80)$ என நிறுவுக.

34. x, y, z என்பன அடுத்தடுத்த எண்களானும் (Consecutive integers) $(2x)^2 - 8xz + z^2 = M(108)$ என நிறுவுக.

35. $x^2 - 1 = M(6)$ என நிறுவுக.

36. 30 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச் சிறிய எண் காண்க.

37. 15 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச் சிறிய எண் காண்க.

38. 20 எண்களால் வகுபடக் கூடிய மிகச் சிறிய எண் காண்க.

39. $n > 7$ என்ற பகா எண்ணுயின் $n^2 - 1 = M(604)$ என நிறுவுக.

40. $n^2 - n = M(42)$ என நிறுவுக.

41. 7 ஐத் தவிர $n > 2$ என்ற பகா எண்ணுயின் $n^2 - 1 = M(56)$ என நிறுவுக.

பின் கொடுக்கப்பட்ட ஓடிவுகளை நிறுவுக :

42. $\lfloor 10 \rfloor - 82 = M(148)$

43. $\lfloor 86 \rfloor + 1087 = M(1517)$

44. $\lfloor 712 \rfloor + 1 = 0$ (மட்டு 719)

45. $(2n+1)$ ஒரு பகா எண்ணுயின்,

$$(\lfloor n \rfloor)^2 = (-1)^{r+1} \text{ (மட்டு } 2n+1).$$

46. $N = a^2 b^2 c^2 \dots$ ஆனால் $(a, b, c \dots)$ பகா எண்கள் N -க்குக் குறைவாய் N ஒரு பகா எண்களாகிவிடுக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{N^2}{8} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right)$

$\left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots \dots$ எனவும், அப்பெண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{N^2}{8} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$
 $+ \frac{N}{8} (1-a)(1-b)(1-c) \dots$ எனவும் திறவுக.

பயிற்சி 2

(1) தன்மை செவ்வாய்க்கு மேக்வாய்க்கு எக்ஸ்

1. ஒரீயல்பான ஏறு தொடர்	0	$+\infty$	$+\infty$
2. ஒரீயல்பான இறங்கு தொடர்	0	$16\frac{1}{2}$	0
3. அலை தொடர்	0	$+\infty$	இல்லை
4. அலை தொடர்	1	8	இல்லை
5. குனி தொடர்	1	$2\frac{1}{2}$	2
6. விரி தொடர்	0	$+\infty$	$+\infty$
7. ஒரீயல்பான இறங்கு தொடர்	1	$2\frac{1}{2}$	1
8. அலை தொடர்	-1	1	இல்லை

(2) தன்மை எக்ஸ்

1. குனி தொடர் 1
2. குனி தொடர் 1
3. குனி தொடர் 1
4. விரி தொடர்
5. குனியத் தொடர்
6. (i) 0 (ii) 0.
8. ஒரீயல்பான ஏறும் தொடர் மூன்று.
9. $\frac{4}{8} \cdot 8\frac{1}{8}$
10. $\frac{a}{b} \cdot 1^{a-b}$.

பயிற்சி 3 (அ)

- | | |
|-------------|--|
| 1. குவியல் | 13. விரியல் |
| 2. குவியல் | 14. விரியல் |
| 3. விரியல் | 15. குவியல் |
| 4. குவியல் | 16. குவியல் |
| 5. குவியல் | 17. விரியல் |
| 6. விரியல் | 18. குவியல் ($p > \frac{1}{2}$)
விரியல் ($p < \frac{1}{2}$) |
| 7. விரியல் | 19. குவியல் [$(p+q) > 1$]
விரியல் [$(p+q) < 1$] |
| 8. விரியல் | 20. விரியல் |
| 9. விரியல் | 21. விரியல் |
| 10. குவியல் | 22. $x > 1$ -க்குக் குவியல்
$x < 1$ -க்கு விரியல். |
| 11. விரியல் | 23. $x < 1$ -க்குக் குவியல்
$x > 1$ -க்கு விரியல். |
| 12. குவியல் | 24. குவியல். |
| | 25. குவியல். |

பயிற்சி 3 (ஆ)

1. விரியல்.
2. $|x| < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
3. $|x| < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
4. $p > 2$ (கு) $p < 2$ (வி)
5. $x > 1$ (கு) $x < 1$ (வி)
6. குவியல்.
7. $|x| < 1$ (கு) $|x| > 1$ (வி)
8. குவியல்
9. குவியல்
10. குவியல்
11. $|x| < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)

12. $-1 < x < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 13. $|x| < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 14. $-1 < x < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 15. $|x| < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 16. $|x| < 1$ (கு) $x < -1$ (வி) $x > 1$ (அ)
 17. $|x| < 1$ (கு) $x < -1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 18. $|x| < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 19. விசியும். 20. விசியும். 21. குவிசியும். 22. விசியும்.
 23. விசியும்.
 24. $p > \frac{1}{2}$ (கு) $p < \frac{1}{2}$ (வி)
 25. $x < 1$ (கு) $x > 1$ (வி)
 26. $-1 < x < 1$ (கு) $x > 1$ (வி) $x < -1$ (அ)
 27. (கு) 28. (கு) 29. (கு)
 30. $|x| < 1$ (கு) $|x| > 1$ (வி)

பயிற்சி 4

1. (i) $2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ (ii) $6 \times 7^2 \times 11^2$
 (iii) $2^3 \times 3^2 \times 7$ (iv) $8^2 \times 5 \times 7^2$
2. (i) 24; 1170 (ii) 24; 11200
3. (i) 72; 127764 (ii) 126; 2229531 (iii) 180; 18744000.
4. 12
5. 148
6. 86
7. 87; 24; 16; 9; 7
 494; 124; 82; 49; 40.
8. 14; 24; 68
10. 38

22. 587
23. 59
24. 23, 128
25. 301
26. 1
27. 16
28. 1, 1, 1
29. 1
30. 720
31. 144
32. 240.

கலைச் சொற்கள்

A

Abbreviation	— குறுக்கம்
Abcissa	— மட்டாயம், x - அச்ச ஆயத் தொலை
Absolute	— அந். தனி
Absolute value	— தனி மதிப்பு, மட்டு மதிப்பு
Abstract	— அகநிலை, வெற்று
Abstract value	— வெற்று மதிப்பு
Accurate	— சிறுபந்தம், மிகச் சரியான, திட்டமான
Ad infinitum	— முடிவின் தி, சுத்தழி வரை
Add	— கூட்டு
Addend	— கூட்டெண்
Addition	— கூட்டல்
Adjacent	— அடுத்த, அடுத்துள்ள
Admissible	— ஏற்கத்தக்க
Aggregate	— சேர்ப்புத் தொகை
Aggregation	— சேர்ப்புக் கூட்டணி
Algebra	— இயற்கணிதம்
Algebraic	— இயற்கணித
Algebraic expression	— இயற்கணித கோவை
Algebraic function	— இயற்கணித சார்பு
Algebraic symbol	— இயற்கணித குறி
Alternate	— ஒன்றுவிட்ட, ஒன்றுவிட்ட தொன்று
Analysis	— கணிதப் பகுப்பு முறை
Answer (n)	— விடை
Answer (v)	— விடை காண்க, விடை கூறு
Anticlockwise	— இடஞ் சுழிவாக, இடமாக
Antilogarithm	— இனமடக்கை (இனமகை)
Apply	— பயன்படுத்து, பொருத்து
Approximate	— தோராயமான, அணித்தான, ஏறத்தாழ

Approximate solution	— தோராயத் தீர்வு
Approximate value	— தோராய மதிப்பு, அண்ணளவு
Approximately	— தோராயமாக
Approximation	— தோராயம்
Approximation successive	— அடுத்தடுத்த தோராயம்
Arbitrary	— யாதாமொரு, கட்டுப்பாடில்லாத
Argument (of a function)	— சார்பின் மாறு எண்
Arithmetic	— எண் கணிதம், எண் கணக்கு
Arithmetic continuum	— எண்ணியல் தொடரகம்
Array	— வரிசை
As (:)	— போல (விதிதசமக் குறி)
Ascending	— ஏறும், ஏறுகின்ற
Ascending order	— ஏறு வரிசை
Associative law	— சேர்ப்பு விதி, தொகுப்பு விதி
Average	— சராசரி
Axioms	— வெளிப்படை உண்மை
Axis	— அச்சு, ஆயம்

B

Base	— அடி
Base of a logarithm	— மடக்கை அடி, மறை அடி
Binomial	— இருறுப்பு
Binomial expansion	— இருறுப்பு விரிவு
Binomial theorem	— இருறுப்புத் தேற்றம்
Biquadratic	— நாற்படி
Biquadratic equation	— நாற்படிச் சமன்பாடு
Bound	— வரம்பு
Bound lower	— கீழ் வரம்பு
Bound upper	— மேல் வரம்பு
Bounded	— வரம்புடையது
Bounded above	— மேல் வரம்புடையது
Bounded below	— கீழ் வரம்புடையது
Bounded function	— வரம்புடையச் சார்பு
Boundless	— வரம்பற்ற
Brackets	— அடைப்புகள்
Brackets curved	— வளை அடைப்புகள் ()
Brackets double	— இரட்டை அடைப்புகள் { }
Brackets square	— பக்க அடைப்புகள், சதுர [] அடைப்புகள்

	C
Calculate	— கணக்கிடு
Calculation	— கணக்கிடு, கணிப்பு
Cancel	— நீக்கு
Case	— வகை
Case general	— பொது வகை
Case particular	— குறிப்பிட்ட வகை
Case special	— சிறப்பு வகை
Central	— மையமான, நடுவான
Centre	— மையம்
Characteristic (logarithm)	— (மடக்கை) முழு எண்
Cipher	— பூச்சியம்
Circle	— வட்டம்
Clockwise	— வலஞ்சுழியாக, வலமாக
Coefficient	— கெழு
Coefficient binomial	— இருபடி கெழு
Co-factor	— இணக்கிண
Co-factor of an element (determinant)	— அணிக்கோவை மூலகத்தின் இணக்கிண
Coincide	— ஒன்றுபடு, பொருத்து
Coincident	— ஒன்றிய, ஒன்றுபட்ட
Coincident roots	— சமத் தீர்வுகள், ஒன்றிய தீர்வுகள்
Column	— திரல்
Column in a determinant	— அணிக்கோவையின் திரல்
Combination	— சேர்வு
Componendo	— கூட்டல் மிகித (தகவு) சமம்
Componendo et dividendo	— கூட்டுவிகித (தகவு) சமம்
Composite	— கூட்டல் - கழித்தல் மிகித (தகவு) சமம்
Composite number	— கூட்டல், தொகுப்பு, பகுதிற
Compound	— தொகுப்பெண்
Conclusion	— கூட்டு
Condensation	— முடிவு
Condensation test	— ஒடுக்கம்
Condensation test (Cauchy)	— ஒடுக்கத் சோதனை
Condition	— (கோசியின்) ஒடுக்கத்தோதனை
Conditional	— கட்டுப்பாடு, நிபந்தனை
	— கட்டுப்பாட்டிற்குட்பட்ட, நிபந்தனைக்குட்பட்ட

Conditional equation	— நிபந்தனைச் சமன்பாடு
Conditions, necessary and sufficient	— வேண்டிய, பொதிய நிபந்தனைகள்
Congruence	— சர்வசமம்
Congruent	— சர்வசமமானவை
Conjugate	— துணையிய, இணை
Conjugate algebraic numbers	— துணையிய இயல் எண்கள்
Conjugate complex number	— துணையிய சிக்கலெண்
Conjugate numbers	— துணையிய எண்கள்
Conjugate roots	— துணையிய தீர்வுகள்
Commensurable	— பொது அளவுள்ள, அளவுக்கிடைய
Common	— பொதுவான
Common denominator	— பொதுப் பகு வெண், புதுப் பின்னக் கீழெண்
Common difference	— பொது வேறுபாடு
Common divisor	— பொது வகுக்குமெண்
Common factor	— பொதுச்சினை
Common fraction	— பொதுப் பின்னம்
Common logarithm	— பொது மடக்கை
Common measure	— பொது அளவு
Common multiple	— பொது மடக்கு
Common ratio	— பொதுவிதிதம் (தகவு)
Commutative law	— மாற்று விதி
Commutative law of addition	— கூட்டத் பரிமாற்று விதி
Commutative law of multiplication	— பெருக்கத் பரிமாற்று விதி
Companion series	— துணைத்தொடர்
Compare	— ஒப்பிடு
Comparison	— ஒப்பீடு
Comparison test	— ஒப்பீட்டுச் சோதனை
Completing the square	— இருபடி நிறைவாக்கம், வர்க்க நிறைவாக்கம்
Complex	— சிக்கலான, கலப்பு
Complex number	— சிக்கலெண், கலப்பெண்
Complex quantity	— சிக்கற் கணிபம்
Consecutive	— அடுத்தடுத்து, தொடர்ச்சி வான
Consecutive numbers	— அடுத்துவரும் எண்கள்
Consequent (ratio)	— பின்னுறுப்பு

Consistency	— இசைவு, பொருத்தமுடையம்
Consistency conditions for	— இசைவு நிபந்தனைகள்
Consistency of equations	— சமன்பாடுகளின் இசைவு நிலை
Consistent	— இசைவுள்ள, பொருத்தமுள்ள
Constant	— மாறிலி நிலை எண்
Construct	— அமை, வரை
Construction	— வரை வழி, வரைவு முறை, அமைவு
Contiguous	— அடுத்த
Continued fraction	— தொடர் பின்னம்
Continued product	— தொடர் பெருக்கம்
Continued proportion	— தொடர் விகித சமம்
Continuity	— தொடர்ச்சி
Continuous	— தொடர்ச்சியான
Continuous at a point	— ஒரு புள்ளியிலே தொடர்ச்சி யான
Continuous curve	— தொடர் வளைவி, தொடர் வரை
Continuous function	— தொடர்புடைய சார்பு
Continuous in an interval	— ஓர் இடைவெளியே தொடர்ச்சி யான
Continuous variable	— தொடர் மாறீ
Contract (v)	— சுருக்கு
Contraction	— சுருக்கம்
Contradiction	— முரண்பாடு, எதிர் மறப்பு
Contradictory	— முரண்பாட்டான, எதிர் மறை யான
Convention	— வழக்கு, மரபு
Converge	— குவி, ஒருங்கு
Convergence	— குவிதல், ஒருங்கல்
Convergence absolute	— அமக்குவிதல்
Convergence conditional	— நிபந்தனைக் குவிதல்
Convergence of a continued fraction	— தொடர்பின்னக் குவிதல்
Convergence uniform	— ஒரு சீராகக் குவிதல்
Convergent	— குவியும், ஒருங்கும்
Convergent of a continued fraction	— தொடர்பின்ன ஒருங்கி
Convergent penultimate	— தொடர்பின்ன கற்பாய் ஒருங்கி
Convergent sequence	— குவிதொடர் முறை
Convergent series	— குவிதொடர்

Converse	— மறுதலை
Conversely	— மறுதலையாக
Conversion	— மாற்றம்
Corollary	— கிளைத்தேற்றம்
Correct	— திருத்தம், திருத்தமான
Correct to the first place of decimals	— முதல் பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
Correct to the place of decimals	— 1 வது பதின் பகுப்புத் திருத்தமாக
Corresponding	— ஒத்த, ஒப்பிய
Counter-clockwise	— இடஞ்சுழியாக, இடமாக
Cross multiplication	— குறுக்குப் பெருக்கல்
Cube root	— மூப்படி, மூலம்
Cubic	— மூப்படியான
Cubic equation	— மூப்படிச் சமன்பாடு
Cyclic	— வட்டமான
Cyclic change	— வட்ட மாற்றம்
Cyclic order	— வட்ட வரிசை
Cyclic permutation	— வட்ட வரிசை மாற்றம்

D

D'Alembert's ratio test	— தாலம்பெரின் விகிதச் சொதனை
Decimal	— பதின் பகுப்பு
Decimal fraction	— பதின் பகுப்பு பின்னம்
Decimal recurring	— மடங்கு பதின் பகுப்பு
Decrease	— குறைதல்
Dedekind cut	— தெடிக்கன்கின் பாகுபாடு
Deduce	— பகுத்தறி
Deduction	— தர்ஜாபடி, பகுத்தறிதல்
Define	— வரையறு
Definite	— வரையறுத்த
Definition	— வரையறை
Denominator	— பகு (க்கும்) எண், பின்னக் கீழெண்
Dense set	— அடர் கணம்
Dense subset	— \bar{A} அடரணை உட்பகுதி
Dependent	— சார்ந்த, சார்புடைய
Deranged series	— ஒழுங்கு மாறிய தொடர்

Derived	— வழிவந்த
Derived equation	— வழிச்சமன்பாடு
Derived function	— வழிச் சார்பு
Derived quantities	— வழிக் கணிப்பங்கள்
Derived set	— வழிக் கணம்
Derived units	— வழி அலகுகள்
Descartes's rule of sign	— டெகார்ட்டின் குறி விதி
Descending order	— இறங்கு வரிசை
„ series	— இறங்கு தொடர்
Determinant	— அணிக்கோவை
„ element of a	— ஓர் அணிக்கோவையின் மூலகம்
Determinate	— தேர்ந்த, தேர்க்கூடிய
Difference	— வேறுபாடு
„ common	— பொது வேறுபாடு
„ mean	— சராசரி வேறுபாடு
„ of first order	— முதல் வரிசை வேறுபாடு
„ of n th order	— n ஆவது வரிசை வேறுபாடு
Differential	— வகைவிடு
„ coefficient	— வகைக்கெழு
Differentiate	— வகைக்கெழு காண்
Differentiation	— வகைக்கெழு காணல்
„ logarithmic	— மடக்கல் வகைக்கெழு காணல்
Digit	— இலக்கம்
Dimension	— வகையளவு
Direct proportion	— தேர் விதித சமம்
Discontinuity	— தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuous	— தொடர்ச்சியற்ற
„ function	— தொடர்ச்சியற்ற சார்பு
Discriminant	— தன்மை காட்டி
Distributive law	— பங்கிட்டு விதி
Diverge	— விரி
Divergent	— விரிவின்ற, விரியும்
Divergent sequence	— விரி தொடர் மூகை
„ series	— விரி தொடர்
Divide	— வகு
Dividend	— வகுபடும் எண்
Dividendo	— கழித்தல் விதித சமம்
Divisibility	— வகுபடு தன்மை
Division	— வகுத்தல், பிரித்தல்

Division synthetic	— தொகுமுறை வகுத்தல்
Divisor	— வகுக்கும் எண்
Domain	— (எண்) ஆரம்பம்
Double root	— இரட்டைத் தீர்வு, இருமுறை மடங்குத் தீர்வு

E

Element	— மூலகம், மூலக உறுப்பு
.. of a determinant	— அணிக் கோவைபின் மூலகம்
Eliminate	— நீக்கு, நீக்கப் பதன்
Eliminate	— விலக்கு, நீக்கு
Elimination	— விலக்கம், நீக்கல்
Equal	— சமம், சமன்
.. in all respects	— சர்வசமம்
Equate	— சமன் செய், சமன்படுத்து
Equation	— சமன்பாடு
.. algebraic	— இயற்கணிதச் சமன்பாடு
.. binomial	— ஈருறுப்புக்கொழுச் சமன்பாடு
.. biquadratic	— நார்படிச்சமன்பாடு
.. conditional	— நிபந்தனைச் சமன்பாடு
.. cubic	— மூர்படிச் சமன்பாடு
.. homogeneous	— ஒருபடித்தான சமன்பாடு
.. identical	— சரிவ சமன்பாடு
.. indeterminate	— தெராத் சமன்பாடு
.. linear	— ஒருபடிச் சமன்பாடு
.. member of an	— சமன்பாட்டு உறுப்பு
.. numerical	— எண் தரூறிய சமன்பாடு
.. quadratic	— இரூபடிச் சமன்பாடு
.. reciprocal	— நிகர மாற்றுச் சமன்பாடு, நலை நீழ்ச் சமன்பாடு
.. roots of an	— சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (மூலங்கள்)
.. simple	— ஒருபடி, ஒலிதச் சமன்பாடு
Equations, Simultaneous	— ஒருங்கணைச் சமன்பாடுகள்
Equation, Solution of an	— சமன்பாட்டின் தீர்வு காணல்
.. transformation	— சமன்பாட்டு மாற்றம், சமன் பாட்டு மாற்றமைப்பு
Equivalent	— சமம்
Evaluate	— மதிப்பிடு, மதிப்பு காண்

Even function	— இரட்டைச் சார்பு
Even number	— இரட்டைப்படை எண்
Exceptional case	— விசேஷ வகை
Expand	— விரி
Expansion	— விரிவு
Explicit function	— வெளிப்படச் சார்பு
Exponent	— படிக்குறி
Exponential function	— படிக்குறிச் சார்பு
.. series	— படிக்குறித் தொடர்
.. theorem	— படிக்குறித் தேற்றம்
Expression	— கோவை
.. binomial	— இருபடிக்கோவை
.. irrational	— அளவுக்கணக்காத கோவை
.. linear	— ஒருபடிக்கோவை
.. monomial	— ஒருபடிக்கோவை
.. multinomial	— பலபடிக்கோவை
.. rational	— அளவுக்கணக்கிய கோவை
.. trinomial	— மூவடிக்கோவை
Extend	— விரிதல், நீட்டுதல்
Extension	— விரிவு
Extremes (ratios)	— சற்றுமேல், இறுதிகள், எது கள்
F	
Factor	— சினை
.. common	— பொதுச்சினை
.. highest common	— பெரிய பொதுச் சினை, மீள்பெரு பொதுச் சினை, உத்தமப் பொது அளவு
.. prime	— பாகச் சினை
Factorial	— தொடர் பெருக்கம்
.. n	— $(n$ அல்லது $n!)-n$ தொடர் பெருக்கம், n படி வரிசைப் பெருக்கம்
Factorisation	— சினை காணல்
Factorise	— சினை காணல்
Finite	— முடிவுள்ள
.. series	— முடிவுள்ள தொடர்
.. set	— முடிவுள்ள கணம்
First approximation	— முதல் தோராயம்

Formula	— வாய்பாடு
Fourth proportional	— விதித சம நான்காம் உறுப்பு
Fraction	— பின்னம்
.. Continued	— தொடர் பின்னம்
.. decimal	— பதின் பகுப்பும் பின்னம், தசம பின்னம்
.. partial	— பகுதிப் பின்னம்
Function	— சார்பு

G

General	— பொதுவான
Generalise	— பொதுமைப்படுத்து, பொது விதி காண
Generalisation	— பொது விதி
General solution	— பொதுத் தீர்வு
Generating function	— பிறப்பிக்கும் சார்பு
Geometric mean	— பெருக்கிடை
.. progression	— பெருக்குத் தொடர்
.. series	— பெருக்குத் தொடர்
.. .. to infinity	— சுத்தழி வரை பெருக்குத் தொடர்
Graph	— கோட்டுருவம் படம், வரை படம், கோட்டுப் படம்
Graphical solution (of an equation)	— கோட்டுருவம் பட வழியான தீர்வு

H

Harmonic mean	— இசை இடை
.. progression	— இசைத் தொடர்
Homogeneous	— ஒரு படித்தான
.. products	— சம படிப் பெருக்கங்கள்

I

Identical	— முழுதும் ஒத்த
Identity	— முற்றொருமை
Illustration	— எடுத்துக்காட்டு
Imaginary	— கற்பனையான, மெய்யிலா
.. number	— கற்பனை எண்
.. root	— கற்பனைத் தீர்வு

Incommensurable	— அளவுக்கிணங்காத, பொது அளவற்ற
Inconsistent	— பொருத்தாத, முரணான
.. equations	— பொருத்தாத சமன்பாடுகள்
Indefinite	— வரையறுத்த, அளவுபடாத
Independent	— சார்பற்ற, சார்பிலாத
.. variable	— சார்பில் மாறி
Indeterminate	— தேர்ப்பெறுத, தேராத
.. quantity	— தேராத கணிபம்
Index	— படிக்குறி, குறி அட்டவரிசை
.. of a root	— அடிக்குறி, மூலக் குறி
Inequality	— சமனின்மை
Induction	— உய்த்தறிதல்
.. mathematical	— கணித முறை உய்த்தறிதல்
.. proof by	— தொடர்முறைத் தெரிப்பு
Inference	— தேற்றப்பாடு, முடிவு
Infinite	— முடிவிலா
.. sequence	— முடிவிலாத தொடர் முறை
.. series	— உத்தழித் தொடர் முறை
Infinity	— முடிவிலா
Integer	— முழு எண்
.. positive	— கூட்டு முழு எண்
.. negative	— குறை முழு எண்
Inverse	— தேர்மாறு
.. ratio	— தலைகீழ்த் தகவு (விதிதம்)
Irrational	— அளவுக்கிணங்காத
Is to (:)	— தகவுக் குறி, விதிதக் குறி

K

Known quantity	— தெரித்த கணிபம்
----------------	------------------

L

Like signs	— ஒத்த குறிகள்
Like terms	— ஒத்த உறுப்புகள்
Limit	— எல்லை
Limit finite	— நிபட்டமான எல்லை

Limit infinite	—	அந்நிதர் எல்லை
„ tends to a	—	எல்லைவை அணுகுகிறது எல்லைவை நாடுகிறது எல்லைவை நெருங்குகிறது
„ does not tend to a	—	திட்டமான எல்லைவை நெருங்க வில்லை
„ lower	—	கீழ் எல்லை
„ upper	—	மேல் எல்லை
Limits, within finite	—	திட்டமான எல்லைகளுக்குள் உள்வது
Limited	—	எல்லைக்குட்பட்ட
Linear continuum	—	கோட்டுத் தொடரகம்
Logarithm	—	மடக்கை (மகை)
„ common	—	பொது மடக்கை
„ Napierian	—	நேப்பியர் மடக்கை (மடக்கையடி e)
Logarithmic function	—	மடக்கைச் சார்பு
„ series	—	மடக்கைத் தொடர்
Lower bound	—	கீழ் வரம்பு

M

Mantissa	—	மடக்கைப் பின்னம்
Mathematics	—	கணிதம்
„ advanced	—	உயர் கணிதம்
„ applied	—	பயன்வழிக் கணிதம்
„ pure	—	தூய கணிதம்
Mathematical	—	கணிதத்திற்குரிய
„ induction	—	கணித முறை உய்த்தறிதல்
Maximum	—	மீப்பெரு
„ value	—	மீப்பெரு மதிப்பு
Mapping	—	உருமாற்றம், அமைப்பு மாற்றம்
Mean	—	சராசரி, இடை
„ arithmetic	—	உட்டிடை
„ geometric	—	பெருக்கிடை
„ harmonic	—	இசைஇடை
Minimum	—	மீச்சிறு
Minimum value	—	மீச்சிறு மதிப்பு
Minor (of a determinant)	—	சிறி (அணிக் கோவை)
Minus	—	குறி, குறை, எதிர்
Minus sign	—	குறித்தற் குறி, குறைக் குறி

Modulus	—	மட்டு, தனி மதிப்பு
Monomial	—	ஒறுகுப்பு, ஒறுகுப்பித்குரிய
Monotonic	—	ஒரீயல்பான
.. decreasing function	—	ஒரீயல்பாக இறங்கும் சார்பு
.. .. sequence	—	ஒரீயல்பான இறங்கும் தொடர் முறை
.. function	—	ஒரீயல்புச் சார்பு
.. increasing function	—	ஒரீயல்பாக ஏறும் சார்பு
.. increasing sequence	—	ஒரீயல்பான ஏறும் தொடர் முறை
Multinomial	—	பல்லுறுப்புக்குரிய
.. expression	—	பல்லுறுப்புக் கோவை
.. theorem	—	பல்லுறுப்புத் தேற்றம்
Multiple	—	மடங்கு
Multiple, common	—	பொது மடங்கு
.. least common	—	அதன் பொது மடங்கு (அ. பொ. ம.)
Multiplication	—	பெருக்கல்
Multiplicand	—	பெருக்கப்படும் எண்
Multiplier	—	பெருக்குமெண்
Multiply	—	பெருக்கு

N

Negative	—	குறை, எதிர்
.. number	—	குறை எண்
.. quantity	—	குறைக் கணிபம்
.. sign	—	குறைத்தற் குறி
Notation	—	குறியீடு, குறியீட்டு முறை
.. abridged	—	சுருக்குக் குறியீடு
Number	—	எண்
.. abstract	—	வெந்தெண்
.. even	—	இரட்டை எண்
.. odd	—	ஒற்றையெண்
.. prime	—	பகையெண்
.. relation	—	எண் தொடர்பு
.. whole	—	முழுஎண்
Numeration	—	எண்ணீடு
Numerator	—	மேயெண்
Numerical	—	எண்ணுலகிய

		O	
One and only one root		—	ஒரே ஒரு தீர்வு
One to one correspondence		—	ஒன்றுக்குமொன்று ஒத்திமை;
Open interval		—	திறந்த இடைவெளி
Open set		—	திறந்த கணம்
Order		—	வரிசை
Ordinate		—	குத்தாயம்
Origin		—	ஆய ஆதி
		P	
Pair		—	இணையான
Parabola		—	தொடுவளைவு
Particular		—	சிதப்பான
Partial		—	பகுதியான
Perimeter		—	சுற்றளவு
Permutation		—	வரிசை மாற்றம், அடுக்கு
Plus		—	கூட்டு
Plus-sign		—	கூட்டற் குறி
Point		—	புள்ளி
Position		—	இடம்
Positive		—	மிகை, கூட்டு
„ number		—	கூட்டெண்
„ quantity		—	கூட்டுக் கணிபம்
Power		—	படி
Power series		—	வலுத் தொடர்
Principle		—	விதி
Problem		—	கணக்கு
Process		—	வழி, செயல்முறை
Product		—	பெருக்குத் தொகை
Progression		—	தொடர்
„ arithmetic		—	கூட்டுத் தொடர்
„ geometric		—	பெருக்குத் தொடர்
„ harmonic		—	இசைத் தொடர்
Proof		—	தெரிவு, திறவுக
Proper part		—	சரியான பகுதி
Property		—	பண்பு
Proportion		—	விகிதசமம்
„ continued		—	தொடர் விகிதசமம்
„ direct		—	நேர் விகிதசமம்

Proportion inverse	— நேர்மாறு விகிதசமம்
Proportional	— விகிதசமமான
" mean	— விகிதசம இடை
Q	
Quadratic equation	— இருபடிச் சமன்பாடு
" expression	— இருபடிச் கோவை
" surd	— அளவுக்கிணங்காத இருபடி மூலம்
Quantity	— கணிபம்
" unknown	— தெராத கணிபம்
Quarter	— கால்
Quotient	— வடி
R	
Radical	— படி மூலம், படி மூலமுடைய
Radius	— ஆரம்
Rate	— வீதம்
Ratio	— விகிதம்
" antecedent of a	— ஒரு விகிதத்தின் முன்னுறுப்பு
" common	— பொது விகிதம்
" constant	— மாறு விகிதம்
" consequent of a	— ஒரு விகிதத்தின் பின்னுறுப்பு
" direct	— நேர் விகிதம்
" duplicate	— இருபடி விகிதம்
" inverse	— நேர்மாறு விகிதம்
" mean	— இடை விகிதம்
Recurring	— மடங்குகின்ற
" continued fraction	— மடங்குத் தொடர் பின்னம்
" series	— மடங்குத் தொடர்
Reductio ad absurdum	— பொருத்தா முடிவு
Relation	— தொடர்பு
Remainder	— மீதி, மிச்சம்
" theorem	— மீதித் தேற்றம், மிச்சத் தேற்றம்
Represent	— குறி, வகை
Residue	— எச்சம்
Root	— தீர்வு
Root, Cube	— மூப்படி மூலம்
imaginary	— கற்பனைத் தீர்வு

Root irrational	— அளவுக்கிடையற்ற தீர்வு
Root rational	— அளவுக்கிடையற்ற தீர்வு
Root real	— பெய்யெண் தீர்வு
Root square	— இருபடி மூலம்
	§
Section	— பகுப்பு
Sectional sequence	— பகுப்புத் தொடர் முறை
Series	— தொடர்
Series absolutely convergent	— அமக்குறியும் தொடர்
Series arithmetic	— கூட்டுத் தொடர்
Series ascending	— ஏற தொடர்
Series conditionally convergent	— நிபந்தனைக் குறி தொடர்
Series convergent	— குறி தொடர்
Series descending	— இறங்கு தொடர்
Series divergent	— விரி தொடர்
Series exponential	— படிக்குறித் தொடர்
Series geometrical	— பெருக்குத் தொடர்
Series harmonical	— இசைத் தொடர்
Series infinite	— கத்தழித் தொடர், முடிவிலாத் தொடர்
Series logarithmic	— மடக்கைத் தொடர்
Series oscillating	— ஆலைத் தொடர்
Series power	— வலுத் தொடர், அடுக்குத் தொடர்
Series recurring	— மடங்குத் தொடர், மடங்கி வரும் தொடர்
Series summation	— தொடர் கூட்டல்
Set algebra	— கண இயல் கணிதம்
Set of points	— புள்ளித் தொடை, புள்ளிக் கணம்
Sieve of Eratosthenes	— ஏரூதெரெத் தெனிகனின் வடிவம் தட்டு (எண் சக்கடை)
Sign	— குறி
Simple	— தனிவாண, ஒருபடியான, எளிதான
Simple Continued fraction	— சாமானியத் தொடர் பின்னம்
Simple equation	— ஒருபடிச் சமன்பாடு
Simultaneous	— ஒரேயே
Smooth Curve	— பெருவிறகு வளை
Solution	— தீர்வு

Solve	— தீர்வு காண்
Square	— சதுரம்
Square root	— வர்க்க மூலம்
Squared (x^2)	— இருபடி - x^2 -ன்
Standard	— திட்டமான
Standard Form	— திட்ட அமைப்பு
Substitute	— கட்டு செய்
Subtract	— கழி
Sum	— கூட்டுத் தொகை, மொத்தம்
Sum algebraic	— இயற் கணித கூட்டுத் தொகை
Sum to infinity	— கத்தழிக் கூட்டுத் தொகை
Summation	— கூட்டம்
Symbol	— குறியீடு
Symmetric	— சமச்சீரான, சமச்சீருள்ள
Symmetric expression	— சமச்சீர் கோவை
Symmetry	— சமச்சீர்

T

Table	— அட்டவணை
Tend	— நோக்கு, அணுகு, நெருங்கு
Term	— உறுப்பு
Term absolute	— தனி உறுப்பு
Term negative	— குறை உறுப்பு
Term positive	— கூட்டு உறுப்பு
Test	— சோதனை
Test Cauchy's condensation	— கோசியின் ஒடுக்கத் சோதனை
Test D' Alembert's	— தாலம்பெயரின் சோதனை
Test of convergence	— குவி சோதனை, குவித் தற் சோதனை ஒடுங்கத் சோதனை
Test of divergence	— விசி சோதனை, விசித் தற் சோதனை
Theory	— கொள்கை
Theory of equation	— சமன்பாட்டுக் கொள்கை
Theory of numbers	— எண் கொள்கை, எண்ணியல்
Transformation	— மாற்றம், உருவ மாற்றம், நிலை மாற்றம்
Transformation of equation	— சமன்பாட்டு மாற்றம்
Transposition	— ஈட மாற்றம்

U

Undetermined	— தெர
Unit	— அலகு
Unlike	— ஒக்காத
Unlimited	— எல்லைவிடாத

V

Value	— மதிப்பு
Value indeterminate	— தெர முடியாத மதிப்பு
Value limiting	— எல்லை மதிப்பு
Value real	— உண்மை மதிப்பு
Variable	— மாறி
Variable dependent	— சார்புடைய மாறி
Variable independent	— சார்பில்லா மாறி
Variste	— மாறி
Variation	— மாறல், மாறுபாடு
Verification	— சரி பார்த்தல்
Verify	— சரி பார
Vinculum	— தொகுப்புக் கோடு

W

Whole number	— முழு எண்
--------------	------------

X

X-axis	— X - அச்ச
--------	------------

Y

Y-axis	— Y - அச்ச
--------	------------

Z

Zero	— பூச்சியம்
------	-------------